28. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1988/1989

Aufgaben

28. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 281221:

Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) von Null verschiedener reeller Zahlen x, y und z, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = z, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -x, \qquad (2)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = y. \qquad (3)$$

Aufgabe 281222:

Für jede natürliche Zahl $n > 0$ sei f_n die durch

$$\begin{aligned} & f_1(x) = (x-1)^2, \\ & f_2(x) = (x-1)^2 + (2x-1)^2, \\ \text{allgemein} \quad & f_n(x) = (x-1)^2 + (2x-1)^2 + ... + (nx-1)^2 \end{aligned}$$

für alle reellen x definierte Funktion. Der Graph dieser Funktion, jeweils eine Parabel, habe den Scheitel S_n.

a) Man berechne die Koordinaten von S_1, S_2 und S_3.

b) Hat jeweils S_n die Koordinaten (x_n, y_n), so beweise man, daß die Folge (x_n) streng monoton fällt und die Folge (y_n) streng monoton steigt.

Aufgabe 281223:

Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M, gegeben sei ferner ein von M verschiedener Punkt N im Innern von k.

Man untersuche, ob es unter allen durch N gehenden Sehnen AB des Kreises k

a) eine gibt, für die $\overline{NA}^2 + \overline{NB}^2$ möglichst klein ist,

b) eine gibt, für die $\overline{NA}^2 + \overline{NB}^2$ möglichst groß ist.

Gibt es jeweils eine solche Sehne, so gebe man deren Lage (in bezug auf die gegebenen k, M, N) an.

Aufgabe 281224:

Die ganzen Zahlen x_n und y_n seien durch $x_1 = y_1 = 1\,988$ und die Vorschriften

(1) $x_{n+1} = 2x_n - 1$, $n = 1, 2, 3, ...$

(2) $y_{n+1} = 2y_n - 2^{n+1}$, $n = 1, 2, 3, ...$

festgelegt.

Man untersuche, ob

a) alle Zahlen x_n,

b) alle Zahlen y_n

positiv sind.