29. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Saison 1989/1990

Aufgaben

29. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 291031:

Man stelle fest, ob die Zahl

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + ... + \sqrt{1\,989 + \sqrt{1\,990}}}}}$$

rational oder irrational ist.

Aufgabe 291032:

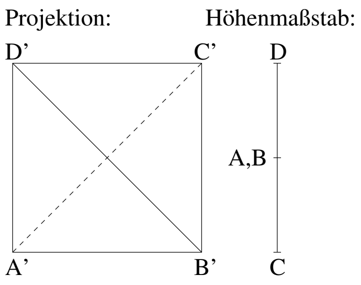
In einem Lande gebe es eine Anzahl $n \geq 3$ von Städten S_1, S_2, ..., S_n. Für je zwei Städte S_i, S_j mit $i < j$ gebe es genau eine von S_i nach S_j führende Einbahnstraße und genau eine von S_j nach S_i führende Einbahnstraße; dies seien alle Straßen des Landes.

Auf einer Landkarte seien diese Straßen unter Verwendung von genau $n-1$ Farben so gefärbt, daß für jede Stadt gilt: Die $n-1$ von dieser Stadt ausgehenden Straßen sind mit den $n-1$ Farben gefärbt, jede mit genau einer Farbe.

Untersuchen Sie für jedes $n \geq 3$, ob man eine Färbung der Straßen unter Einhaltung dieser Bedingungen so wählen kann, daß für eine einheitlich gewählte Reihenfolge F_1, F_2, ..., F_{n-1} der Farben die folgende Aussage (*) zutrifft!

(*) Für jede Stadt S_i $(i = 1, 2, ..., n)$ gilt: Startet man in S_i und fährt der Reihe nach auf den Straßen der Farben F_1, F_2, ..., F_{n-1}, jeweils auf einer dieser Straßen bis zur nächsten Stadt, so endet diese Fahrt stets in der Stadt S_1.

Aufgabe 291033:



Die Abbildung stellt in senkrechter Eintafelprojektion einen ebenflächig begrenzten Körper dar, der genau vier Eckpunkte A, B, C, D hat. Ihre Bildpunkte A', B', C', D' sind die Ecken eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a. Im beigefügten Höhenmaßstab hat D die Höhendifferenz a zu C, und A, B haben die Höhendifferenz $\frac{a}{2}$ zu C.

Ermitteln Sie aus diesen Angaben das Volumen des Körpers!

Aufgabe 291034:

Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung (1) erfüllen

$$\frac{\sqrt{x+5}}{x+1} > 1 \qquad (1)$$

Aufgabe 291035:

Man begründe und beschreibe eine Konstruktion, durch die zu beliebig vorgegebenen Dreiecken ABC alle diejenigen Geraden g erhalten werden können, die die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen:

(1) Die Gerade g geht durch den Mittelpunkt M der Seite AC.

(2) Die Gerade g schneidet die Verlängerung der Seite BA über A hinaus in einem Punkt P und folglich die Seite BC in einem Punkt Q.

(3) Der Flächeninhalt des Dreiecks AMP ist doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks CMQ.

Man zeichne ein beliebiges, nicht gleichschenkliges und nicht rechtwinkliges Dreieck ABC und führe dann die beschriebene Konstruktion aus.

Aufgabe 291036:

a) Man beweise, daß es zu jeder natürlichen Zahl k eine natürliche Zahl m sowie eine Möglichkeit gibt, m Vorzeichen (jeweils $+$ oder $-$) derart zu wählen, daß mit den gewählten Vorzeichen

$$\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm ... \pm m^2 = k \tag{1}$$

gilt.

b) Man beweise, daß es zu jeder natürlichen Zahl k sogar unendlich viele verschiedene natürliche Zahlen m und zugehörige Vorzeichenwahlen gibt, mit denen (1) gilt.