29. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1989/1990

Aufgaben

29. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 291041:

Gegeben seien drei Geraden g, h, j in einer Ebene; keine zwei dieser Geraden seien zueinander parallel; kein Punkt der Ebene liege auf allen drei Geraden. Gegeben sei ferner eine Länge a.

Gesucht ist für jede solche Vorgabe von g, h, j, a die Anzahl aller derjenigen Kreise c, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

(1) Der Kreis c schneidet jede der Geraden g, h, j in zwei Punkten G_1, G_2 bzw. H_1, H_2 bzw. J_1, J_2.

(2) Es gilt $\overline{G_1G_2} = \overline{H_1H_2} = \overline{J_1J_2} = a$.

Aufgabe 291042:

Von zwei reellen Zahlen werde gefordert: Die Summe aus dem Reziproken der beiden Zahlen und dem Reziproken des Produktes der beiden Zahlen beträgt 1.

Man ermittle alle diejenigen Werte, die sich als Summe s zweier derartiger Zahlen ergeben können.

Aufgabe 291043A:

Man beweise folgende Aussage:

Die Folge $(2n-1)$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ enthält für jede beliebige Zahl z einen Abschnitt, dessen Länge größer als z ist und in dem keine Primzahl vorkommt.

Hinweis : Ist (a_n) $(n = 1, 2, 3, ...)$ eine Folge und sind $k \geq 1$ und m natürliche Zahlen, so heißt das k-Tupel $(a_{m+1}, a_{m+2}, ..., a_{m+k})$ ein *Abschnitt* der Folge (a_n) und k seine *Länge*.

Aufgabe 291043B:

Gegeben seien fünf Punkte A, B, C, D, E. Sie seien so im Raum gelegen, daß keine vier dieser fünf Punkte in einer gemeinsamen Ebene liegen und daß keine zwei Verbindungsstrecken von je zwei verschiedenen dieser fünf Punkte einander gleich lang sind.

Ermitteln Sie für jede Lagemöglichkeit derartiger Punkte die Anzahl aller verschiedenen Polyeder, die genau die fünf Ecken A, B, C, D, E haben!

Dabei seien zwei Polyeder genau dann als voneinander verschieden bezeichnet, wenn es keine Drehung und keine Spiegelung gibt, die das eine Polyeder in das andere überführt.

Hinweis : Ein Polyeder ist ein Körper endlicher Größe, dessen Oberfläche aus ebenen Vielecken besteht.

Aufgabe 291044:

In jedes leere Kästchen des Bildes soll eine natürliche Zahl so eingetragen werden, daß in jeder Zeile und in jeder Spalte eine (fünfgliedrige) arithmetische Folge steht.

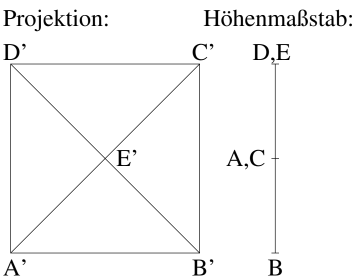
Ermitteln Sie alle Eintragungen, die diese Forderungen erfüllen!

				65
	41			
		81		
1				

Aufgabe 291045:

Ermitteln Sie eine Verteilung von fünf verschiedenen Punkten auf die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks (einschließlich seines Randes), bei der der kleinste Abstand zwischen zwei verschiedenen dieser Punkte möglichst groß wird!

Aufgabe 291046:



Die Abbildung stellt in senkrechter Eintafelprojektion ein Polyeder dar, das genau die Punkte A, B, C, D, E als Ecken hat. Die Bildpunkte A', B', C', D' sind die Eckpunkte eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a, der Bildpunkt E' ist der Mittelpunkt des Quadrates.

Im beigefügten Höhenmaßstab ist a die Höhe von D und E über der von B, und $\frac{a}{2}$ ist die Höhe von A und C über der von B.

Beweisen Sie, daß es bis auf Kongruenz genau ein Polyeder gibt, auf das diese Beschreibung zutrifft! Ermitteln Sie das Volumen dieses Polyeders!