30. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 8
Saison 1990/1991

Aufgaben

30. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 300831:
Ermittle die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen, die jede der Ziffern 1, 2, 3, ... , 9 genau einmal enthalten und durch 45 teilbar sind!

Aufgabe 300832:
Gegeben seien drei verschiedene Sorten von Kugeln; von jeder Sorte seien 100 Stück vorhanden:

Sorte A: Kugeln mit einer Masse von $0,3$ g je Stück,

Sorte B: Kugeln mit einer Masse von $1,5$ g je Stück,

Sorte C: Kugeln mit einer Masse von $7,0$ g je Stück.

Untersuche, ob es möglich ist, aus diesen Kugeln genau 100 so auszuwählen, daß ihre Gesamtmasse genau 100 g beträgt! Wenn das der Fall ist, so ermittle alle derartigen Möglichkeiten für die drei Anzahlen, die man jeweils aus Kugeln der Sorten A, B und C auszuwählen hat!

Aufgabe 300833:
Aus drei gegebenen Längen $c = 8$ cm, $s_a = 6$ cm, $s_b = 7$ cm soll ein Dreieck ABC konstruiert werden. Dabei wird gefordert:

(1) Die Seite AB hat die Länge $\overline{AB} = c$.

(2) Die Seitenhalbierende AD der Seite BC hat die Länge $\overline{AD} = s_a$.

(3) Die Seitenhalbierende BE der Seite AC hat die Länge $\overline{BE} = s_b$.

a) Konstruiere ein Dreieck und beschreibe deine Konstruktion!

b) Beweise: Wenn ein Dreieck nach deiner Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die Bedingungen (1), (2), (3).

Aufgabe 300834:
Man beweise: Für jede natürliche Zahl $n > 0$ befindet sich stets unter den natürlichen Zahlen $n-1$, n, $n+1$ und $n^2 + 1$ eine Zahl, die durch 5 teilbar ist.

Aufgabe 300835:

a) Beweise den folgenden Satz:

   In jedem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten stets auch der größere Winkel gegenüber.

b) Gib an, ob die Umkehrung dieses Satzes gilt, und beweise die Richtigkeit deiner Angabe!

Aufgabe 300836:

Im Raum seien zwölf Punkte derart gelegen, daß keine vier dieser Punkte in einer gemeinsamen Ebene liegen.

Ermittle die Anzahl aller derjenigen verschiedenen Tetraeder, deren vier Eckpunkte zu den zwölf gegebenen Punkten gehören!

Hinweis: Jedes Tetraeder ist durch die Menge seiner vier Eckpunkte (die nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen) eindeutig bestimmt; irgendwelche Anforderungen an die Reihenfolge oder die gegenseitigen Abstände der Eckpunkte gibt es nicht.