30. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 9
Saison 1990/1991

Aufgaben

30. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 300931:

Zwei Spieler A und B spielen das folgende Spiel:

Auf dem Tisch liegen aufgedeckt 50 Spielkarten. Jede ist mit genau einer der Zahlen von 1 bis 50 beschriftet, jede dieser Zahlen steht auf genau einer der Karten. Weitere unbeschriftete Karten stehen zur Verfügung. Die Spieler sind, beginnend mit A, abwechselnd am Zug.

Wer am Zug ist, wählt zwei beliebige der beschrifteten Karten und nimmt sie aus dem Spiel. Dann beschriftet er eine der unbeschrifteten Karten mit dem Absolutbetrag der Differenz der Zahlen auf den weggenommenen Karten, legt die so neu beschriftete Karte auf den Tisch und bringt sie damit ins Spiel.

Das Spiel endet, wenn nur noch eine Karte im Spiel ist. Steht auf dieser eine gerade Zahl, so hat A gewonnen, andernfalls B.

Kann einer der Spieler das Spiel so gestalten, daß er mit Sicherheit gewinnt?

Aufgabe 300932:

Man ermittle alle Darstellungen der Zahl 1 991 als Summe von mindestens drei aufeinanderfolgenden positiven natürlichen Zahlen.

Aufgabe 300933:

Man beweise, daß es 40 im Innern oder auf dem Rand eines Würfels der Kantenlänge 10 cm liegende Punkte gibt, von denen keine zwei einen Abstand kleiner als 4 cm voneinander haben.

Aufgabe 300934:

Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n zwischen 100 und 400, für die die Summe s der Ziffern bei Darstellung von n im Dezimalsystem (die übliche "Quersumme") gleich der Summe t der Ziffern ist, die bei der Darstellung von n im System mit der Basis 9 auftreten.

Hinweis: Um eine Summe von Ziffern bilden zu können, ist natürlich jede einzelne Ziffer als Zahl aufzufassen. Das ist ohne Mißverständnis möglich, da die für das System der Basis 9 notwendige Ziffern 0, 1, ... , 8 dort dieselben Zahlen darstellen wie im Dezimalsystem.

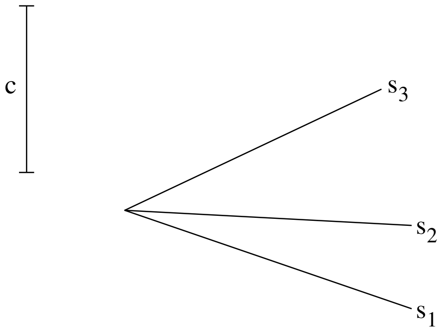
Aufgabe 300935:

Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen, für die

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5} \quad \text{gilt!}$$

Aufgabe 300936:

Gegeben seien drei von einem Punkt S ausgehenden Strahlen s_1, s_2, s_3. Dabei habe der von s_1 und s_3 gebildete Winkel $\sphericalangle(s_1, s_3)$ eine beliebige Größe kleiner als 60°, und der Strahl s_2 sei ein beliebiger von S aus in das Innere des Winkels $\sphericalangle(s_1, s_3)$ hinein verlaufender Strahl (siehe Abbildung). Gegeben sei ferner eine beliebige Streckenlänge c.



a) Wählen Sie derartige Vorgaben c, s_1, s_2, s_3 (dabei s_2 nicht als Winkelhalbierende von $\sphericalangle(s_1, s_3)$ und konstruieren Sie dann drei von S verschiedene Punkte A auf s_1, B auf s_2 und C auf s_3 so, daß sie die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks ABC der Seitenlänge c sind!

b) Beschreiben Sie Ihre Konstruktion!

c) Beweisen Sie, daß das nach Ihrer Beschreibung konstruierte Dreieck ABC gleichseitig ist und daß seine Ecken A, B, C auf s_1, s_2 bzw. s_3 liegen.

Eine Untersuchung, wieviele Dreiecke mit den geforderten Eigenschaften es außerdem noch gibt, wird nicht verlangt.