30. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 10
Saison 1990/1991

Aufgaben

30. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 301011:

a) Beweisen Sie, daß es unendlich viele pythagoreische Zahlentripel gibt!

b) Beweisen Sie, daß es auch pythagoreische Zahlentripel mit verschiedenen Werten jeweils des Quotienten aus der größten und der kleinsten Zahl des Tripels gibt!

Hinweis: Ein pythagoreisches Zahlentripel ist ein Tripel (a, b, c) aus drei positiven natürlichen Zahlen a, b, c, für die $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.

Aufgabe 301012:

Armin möchte ein (auf einem KC lauffähiges) BASIC-Programm schreiben, mit dem sich nach Eingabe jeweils einer natürlichen Zahl $Z > 1$ feststellen läßt, ob Z eine Primzahl ist. Er legt das Programm so an, daß darin (durch eine FOR ... NEXT-Anweisung) alle natürlichen Zahlen $N = 2, ..., Z - 1$ geprüft werden, ob sie Teiler von Z sind.

Bert sagt dazu: "Es genügt, nur die natürlichen Zahlen $N = 2, ..., G$ zu prüfen, wobei G die ganze Zahl mit $G \leq \sqrt{Z} < G + 1$ ist (also durch G = INT(SQR(Z)) ermittelt werden kann)." Er sagt außerdem: "Wenn Z eine mindestens dreistellige Primzahl ist, so sind nach meinem Vorschlag weniger als ein Zehntel so vieler Zahlen zu überprüfen wie bei deinem Verfahren."

Armin entgegnet: Bei deinem Vorschlag, bei dem ja Teiler von Z ungeprüft bleiben können, hat man keine Sicherheit, daß jede Nichtprimzahl als solche erkannt wird."

a) Ist Berts erste Aussage oder Armins Entgegnung wahr?

b) Ist Berts zweite Aussage wahr?

Aufgabe 301013:

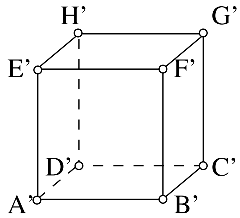
Wenn die Produktion eines Betriebes um 50% zurückging (z.B. infolge des Ausfallens eines Teils der Anlage), so muß sie anschließend offensichtlich verdoppelt, d.h. um 100% erhöht werden, um wieder auf den Anfangswert gebracht zu werden.

Ermitteln Sie eine Formel, durch die man jeweils aus einem gegebenen Prozentsatz a denjenigen Prozentsatz b berechnen kann, für den die nachstehende Aussage (1) gilt!

(1) Wenn die Produktion um a Prozent zurückging, so muß sie anschließend um b Prozent erhöht werden, um wieder auf den Anfangswert gebracht zu werden.

Aufgabe 301014:

Das Bild sei das Bild eines von genau sechs ebenen Vierecksflächen begrenzten Körpers $ABCDEFGH$ in Parallelprojektion. Die Vierecke $A'B'C'D'E'F'G'H'$ sind einander kongruente Quadrate. Die vier Strecken $A'D'$, $B'C'$, $F'G'$, $E'H'$ sind zueinander parallel und gleichlang. D' liegt im Inneren von $A'B'F'E'$.



Beweisen Sie, daß es einen Körper gibt, mit dem bei geeigneter Parallelprojektion diese Bedingungen erfüllt sind und bei dem keine seiner sechs begrenzenden Vierecksflächen einen Innenwinkel der Größe 90° hat!