30. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 10
Saison 1990/1991

Aufgaben

30. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 301021:

In dem nachstehenden Kryptogramm sind die Buchstaben so durch Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 zu ersetzen, daß gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt werden und daß eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Der Buchstabe o braucht nicht durch die Ziffer 0 (Null) ersetzt zu werden.

$$\begin{array}{cccccc} & & \mathrm{m} & \mathrm{o} & \mathrm{r} & \mathrm{d} \\ + & & \mathrm{r} & \mathrm{a} & \mathrm{u} & \mathrm{b} \\ \hline = & \mathrm{k} & \mathrm{r} & \mathrm{i} & \mathrm{m} & \mathrm{i} \end{array}$$

a) Beweisen Sie, daß sogar in keiner Lösung des Kryptogrammes der Buchstabe o durch 0 ersetzt wird!

b) Geben Sie vier Ersetzungen an, unter denen sich keine zwei mit gleichem Wert für a befinden! Bestätigen Sie, daß die von Ihnen angegebenen Ersetzungen vier Lösungen des Kryptogramms sind!

Aufgabe 301022:

Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl n, die nicht Quadratzahl ist, die Zahl $\sqrt{n}$ irrational ist!

Dabei werde wie üblich eine natürliche Zahl n genau dann Quadratzahl genannt, wenn es eine natürliche Zahl k gibt, mit der $n = k^2$ gilt.

Aufgabe 301023:

Beweisen Sie die folgende Aussage!

Wenn $ABCD$ ein Rechteck mit $\overline{AB} > \overline{AD}$ ist, so schneidet die Mittelsenkrechte der Diagonale AC die Randlinie des Dreiecks ABC in einem Punkt P, der zwischen B und dem Mittelpunkt Q der Strecke AB liegt.

Aufgabe 301024:

Für jede ganze Zahl $n > 0$ sei

$$a_n = \left((n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}\right)^{-1};$$

mit dieser Bezeichnung sei

$$s = a_1 + a_2 + ... + a_{1\,989} + a_{1\,990}.$$

Beweisen Sie, daß hieraus $0,5 < s < 1$ folgt!