30. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 10
Saison 1990/1991

Aufgaben

30. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 301031:

Beim Umrechnen natürlicher Zahlen aus dem Dezimalsystem in Systeme mit anderer Basis kann man feststellen, daß es Zahlen gibt, deren Darstellung sowohl im System mit der Basis 2 als auch im System mit der Basis 4 auf die Ziffernfolge ...01 endet; z.B. hat $17 = [10001]_2 = [101]_4$ diese Eigenschaft.

Gibt es auch natürliche Zahlen, deren Darstellung in beiden Systemen (sowohl mit der Basis 2 als auch mit der Basis 4) auf die Ziffernfolge ...10 endet?

Aufgabe 301032:

Bekanntlich nennt man jede Folge von n Zahlen der Form

$$a_1 = z \qquad a_2 = z + d \qquad a_3 = z + 2d \qquad a_n = z + (n-1)d \tag{1}$$

($n \geq 1$ natürliche Zahl; z, d reelle Zahlen)

eine (endliche) arithmetische Folge.

Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen arithmetischen Folgen (1), in denen auch z und d natürliche Zahlen mit $z \geq 1$, $d \geq 1$ sind und für die $n \geq 3$ sowie

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = 1\,991 \tag{2}$$

gilt!

Aufgabe 301033:

Es sei F die Oberfläche eines regulären Tetraeders $ABCD$. Die Mittelpunkte der Strecke AB bzw. CD seien M bzw. N.

Die Abbildungen a und b verdeutlichen den Vorgang des "Aufschneidens einer Fläche F längs einer Kurve $k = XY$": Diese Kurve k, die im Innern der Fläche F verläuft, geht durch das Aufschneiden über in eine von X nach Y durchlaufende Kurve k_1 und eine andere von Y nach X durchlaufende Kurve k_2. Beide Kurven k_1 und k_2 bilden zusammen eine neu entstandene geschlossene (d.h. in sich zurücklaufende) Randkurve der aufgeschnittenen Fläche F.

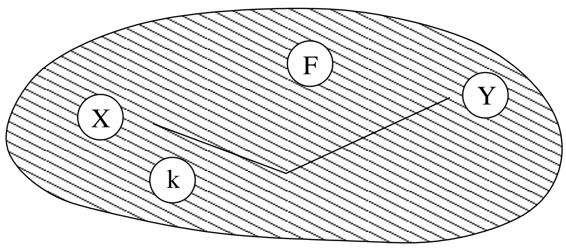

Abbildung a)

a) Schneidet man die Tetraederfläche F in dieser Weise zweimal auf, nämlich längs der Strecke AB und außerdem längs der Strecke CD, so läßt sich die aufgeschnittene Fläche F so verbiegen, daß die aus AB und aus CD entstandenen Randkurven zu zwei Kreislinien werden, die in zueinander parallelen Ebenen liegen. Die Fläche F wird dabei zur Mantelfläche eines geraden Zylinders.

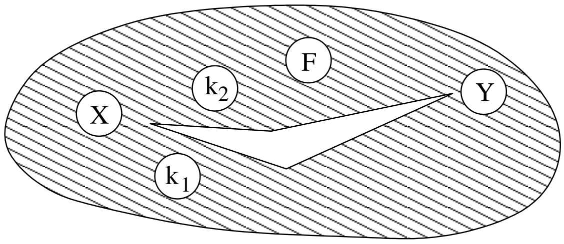

Abbildung b)

b) Schneidet man die Tetraederfläche sowohl längs der Kurve auf, die aus den Strecken CM und MD besteht, als auch längs der Kurve, die aus den Strecken AN und NB besteht, so läßt sich F ebenfalls so verbiegen, daß die Randkurve zu Kreislinien werden und F zum Mantel eines geraden Zylinders.

Untersuchen Sie, welcher der beiden in a), b) genannten Zylinder das größere Volumen hat!

Aufgabe 301034:

Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung (1) erfüllen!

$$||x-2|-2|<1. \tag{1}$$

Aufgabe 301035:

Man untersuche, ob es eine Menge $\mathfrak{M}$ von 1 991 verschiedenen positiven natürlichen Zahlen mit folgenden Eigenschaften gibt:

(1) Keine Zahl aus $\mathfrak{M}$ enthält einen Primfaktor größer als 31.

(2) Kein Produkt von zwei verschiedenen Zahlen aus $\mathfrak{M}$ ist eine Quadratzahl.

Aufgabe 301036:

Zur Konstruktion eines Dreiecks seien die Streckenlängen $c=\sqrt{120}$ cm und $r=3$ cm vorgegeben. Gefordert wird, daß c die Länge der Seite AB ist, r der Inkreisradius des Dreiecks ABC ist und daß der Winkel $\sphericalangle ACB$ die Größe von $60°$ hat.

a) Beweisen Sie: Wenn ein Dreieck ABC diese Bedingungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Streckenlängen c und r konstruiert werden.

b) Beschreiben Sie eine solche Konstruktion!

c) Beweisen Sie: Wenn ein Dreieck nach Ihrer Beschreibung konstruiert werden kann, dann erfüllt es die geforderten Bedingungen.

d) Beweisen Sie, daß es bis auf Kongruenz (bei der es nicht auf die Reihenfolge der Eckpunkte A, B, C ankommt) genau ein Dreieck ABC gibt, das diese Bedingungen erfüllt!

Eine zeichnerisch genaue Ausführung der Konstruktion wird nicht verlangt.