30. Mathematik Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 10
Saison 1990/1991

Aufgaben

30. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 301041:

Zur Konstruktion eines Vierecks $ABCD$ seien die Streckenlängen $a = 3\,\text{cm}$, $c = 6\,\text{cm}$, $e = \sqrt{27}\,\text{cm}$, $f = \sqrt{108}\,\text{cm}$ und die Winkelgröße $\varphi = 60°$ vorgegeben. Gefordert wird:

(1) Die Seite AB hat die Länge $\overline{AB} = a$.

(2) Die Seite CD hat die Länge $\overline{CD} = c$.

(3) Die Diagonale AC hat die Länge $\overline{AC} = e$.

(4) Die Diagonale BD hat die Länge $\overline{BD} = f$.

(5) Die Diagonalen AC und BD schneiden sich in einem Punkt S, für diesen hat der Winkel $\sphericalangle ASB$ die Größe φ.

(a) Beweisen Sie: Wenn ein Viereck $ABCD$ die geforderten Bedingungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Größen a, c, e, f, φ konstruiert werden.

(b) Beschreiben Sie eine Konstruktion und führen Sie die beschriebene Konstruktion durch!

(c) Beweisen Sie: Wenn ein Viereck $ABCD$ nach Ihrer Beschreibung konstruiert werden kann, dann erfüllt es die geforderten Bedingungen!

(d) Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Viereck $ABCD$ gibt, das die geforderten Bedingungen erfüllt!

Aufgabe 301042:

Es seien x_1, x_2 ... x_n Zahlen, von denen jede entweder gleich 1 oder gleich -1 ist. Ferner sei $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$, $x_{n+3} = x_3$; für jedes $i = 1, ..., n$ sei

$$p_i = x_i \cdot x_{i+1} \cdot x_{i+2} \cdot x_{i+3}, \quad \text{und es werde} \quad p_1 + p_2 + ... + p_n = 0 \quad \text{vorausgesetzt.}$$

Man beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt: n ist durch 4 teilbar.

Aufgabe 301043A:

Untersuchen Sie, ob es eine natürliche Zahl m derart gibt, daß es zu jeder positiven natürlichen Zahl k höchstens m natürliche Zahlen t gibt, mit denen die Zahl $\sqrt{t + k \cdot \sqrt{t}}$ rational ist.

Aufgabe 301043B:

Im Raum seien vier Punkte A, B, C, D so gelegen, daß zwischen ihnen folgende Abstände auftreten:

$$\overline{AB} = 7{,}2 \text{ cm};\ \overline{AC} = 9{,}6 \text{ cm};\ \overline{AD} = 15{,}6 \text{ cm};\ \overline{BC} = 12{,}0 \text{ cm};\ \overline{BD} = 15{,}6 \text{ cm};\ \overline{CD} = 15{,}6 \text{ cm}.$$

Ermitteln Sie den Radius r derjenigen Kugel, auf deren Oberfläche diese vier Punkte liegen!

Aufgabe 301044:

Untersuchen Sie, ob es eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion f so gibt, daß für alle natürlichen Zahlen a und b die Gleichung

$$f(a) + f(a+b) - f(a-b) = a^2 + 4b + 2 \text{ gilt!}$$

Aufgabe 301045:

Ein Mathematiklehrer, der demnächst den Flächeninhalt von Kreisen behandeln wollte, stellte folgende vorbereitende Hausaufgabe:

Auf kariertem Papier (quadratische Kästchen) der Seitenlänge 5 mm) sollten die Schüler um einen Eckpunkt eines Kästchens Kreise mit den Radien 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm und 5 cm zeichnen. Zu jedem dieser Kreise sollten sie unter allen Kästchen, die gemeinsame Punkte mit der Kreisfläche haben, diejenigen zählen,

a) die vollständig in der Kreisfläche enthalten sind,

b) deren Vereinigungsmenge die Kreisfläche vollständig überdeckt.

Offenbar ergibt das Produkt des Flächeninhaltes eines Kästchens mit der in (a) gefundenen Anzahl einen zu kleinen Näherungswert für den Flächeninhalt des Kreises, mit der in (b) gefundenen Anzahl dagegen einen zu großen Näherungswert. Anschließend sollte noch das arithmetische Mittel dieser beiden Näherungswerte (als ein dritter Näherungswert) berechnet werden.

Die Schüler, die sehr sorgfältig gearbeitet hatten, erhielten folgende Ergebnisse:

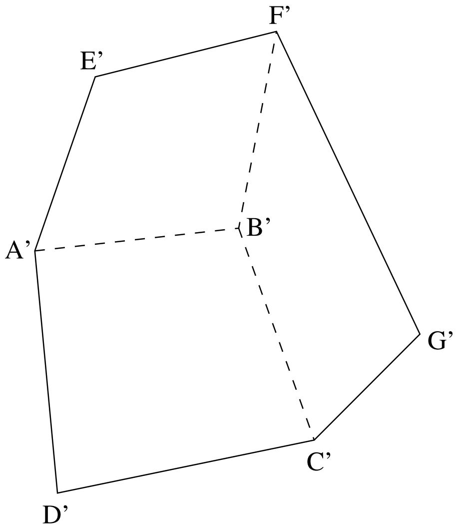
Radius r in cm	Anzahl der Kästchen		Näherungswert des Verfügung
	bei a)	bei b)	Flächeninhalts in cm^2
1	4	16	$(1+4):2 = 2,5$
2	32	60	$(8+15):2 = 11,5$
3	88	132	$(22+33):2 = 27,5$
4	164	224	$41+56):2 = 48,5$
5	276	344	$69+86):2 = 77,5$

Nun wurde bemerkt, daß jeweils die Maßzahlen des dritten Näherungswertes sämtlich nach dem Komma die Ziffer 5 haben. Trifft das auch bei der Wahl aller Radien r zu, deren Maßzahlen in cm die natürlichen Zahlen größer als 5 sind?

Aufgabe 301046:

Das Arbeitsblatt zeigt die Bilder A', B', C', D', E', F', G' von sieben Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G eines Körpers bei Parallelprojektion. Dieser Körper hat außerdem noch einen Eckpunkt H; die Oberfläche des Körpers besteht aus sechs ebenen Vierecken $ABCD$, $ABFE$, $ADHE$, $BCGF$, $CDHG$, $EFGH$. Die Kanten AB, BC, BF werden (bei der Sicht auf die Zeichenebene in Projektionsrichtung) von davor liegenden Flächen verdeckt; daher sind $A'B'$, $B'C'$, $B'F'$ gestrichelt gezeichnet.

Konstruieren Sie unter diesen Voraussetzungen das Bild H' des Punktes H und die Bilder der von H ausgehenden Kanten! Begründen und beschreiben Sie Ihre Konstruktion! (siehe Abbildung)


F'
E'
B'
A'
G'
C'
D'