30. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 12
Saison 1990/1991

Aufgaben

30. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 301221:

Man beweise die folgende Aussage:

Wenn a, b, c positive reelle Zahlen sind, für die

$$b^2 - a^2 = c^2 - b^2 \tag{1}$$

gilt, dann gilt auch stets

$$\frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+c} \tag{2}$$

Aufgabe 301222:

Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen x und y, die dem System der folgenden Ungleichungen (1) und (2) genügen:

$$2x^2 + 2y^2 - 12x + 20y + 65 < 0, \tag{1}$$
$$4x + 2y > 5. \tag{2}$$

Aufgabe 301223:

Man beweise, daß für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1} \tag{1}$$

Hinweis: Für jede natürliche Zahl $q \geq 2$ bezeichnet $q!$ wie üblich das Produkt aller derjenigen natürlichen Zahlen i, für die $1 \leq i \leq q$ gilt.

Aufgabe 301224:

Ist ABC ein Dreieck, so bezeichne S den Schnittpunkt seiner Seitenhalbierenden, ferner sei mit U, V bzw. W der Fußpunkt des von S auf die Seite BC, CA bzw. AB gefällten Lotes bezeichnet und $J(ABC)$ bzw. $J(UVW)$ bezeichne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC bzw. UVW.

Man beweise mit diesen Bezeichnungen, daß das Verhältnis $r = J(UVW) : J(ABC)$ in allen rechtwinkligen Dreiecken ABC denselben Wert hat und ermittle diesen Wert r.