30. Mathematik Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 12
Saison 1990/1991

Aufgaben

30. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 301241:

Man ermittle zu jedem Tripel (a, b, c) positiver reeller Zahlen a, b, c alle diejenigen Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

(1) $x^2 - (y - z)^2 = a$,

(2) $y^2 - (z - x)^2 = b$,

(3) $z^2 - (x - y)^2 = c$.

Aufgabe 301242:

Zu einem würfelfömigen Kasten der Kantenlänge 10 cm seien alle diejenigen Geraden betrachtet und als *markiert* bezeichnet, die durch das Innere des Würfels gehen, parallel zu einer Würfelkante verlaufen und von den beiden Seitenflächen, die diese Kante enthalten, ganzzahlige (in cm gemessene) Abstände haben.

Man beweise: Wie man auch den Kasten mit 250 quaderförmigen Bausteinen der Abmessungen 2 cm $\times$ 2 cm $\times$ 1 cm vollständig ausfüllt, stets gibt es wenigstens 100 markierte Geraden, die keinen der Bausteine durchstechen.

Dabei gilt ein Baustein genau dann als *durchstochen*, wenn die Gerade innere Punkte des Bausteins enthält.

Aufgabe 301243:

Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die den folgenden Bedingungen (1) und (2) genügen:

(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen x definiert und stetig.

(2) Für jede reelle Zahl x gilt $f(x) - 4f(x^2) = x - 16x^4$.

Aufgabe 301244:

Eine streng monoton steigende Zahlenfolge $x_1, x_2, ..., x_n$ werde genau dann $m-$*schmal* genannt, wenn für alle $a = 2, ..., n$ die Ungleichungen $x_a - x_{a-1} \leq m$ gelten.

Eine Menge A von Zahlen werde genau dann $m-$*dicht* genannt, wenn sie für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ eine n-gliedrige streng monoton steigende Zahlenfolge enthält, die m-schmal ist.

Man beweise die folgende (einen berühmten Satz des niederländischen Mathematikers B. L. van der Waerden abschwächende[1)]) Aussage:

Zu jeder Zerlegung der Menge N aller natürlichen Zahlen in eine Anzahl $r \geq 2$ paarweise disjunkter nicht leerer Teilmengen $T_1, ..., T_r$ gibt es eine positive Zahl m, so daß (mindestens) eine der Mengen $T_1, ..., T_r$ eine m-dichte Menge ist.

[1)]Diesen Satz (bei dem arithmetische statt m-schmaler Folgen auftreten) ohne Beweis nur als bekannten Sachverhalt zu zitieren, würde hier für eine Lösung der obigen Aufgabe 301344 nicht ausreichen.

Aufgabe 301245:

Man ermittle ein Polynom

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \quad (a_0, a_1, ..., a_n \text{ reell; } a_n \neq 0), \tag{1}$$

das die Bedingungen

$$\begin{aligned} f(-4) = 0, \quad f(-3) = 1, \quad f(-2) = 0, \quad f(-1) = -1, \quad f(0) = 0, \\ f(1) = 1, \quad f(2) = 0, \quad f(3) = -1, \quad f(4) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

erfüllt und dabei möglichst niedrigen Grad n hat.

Aufgabe 301246A:

Man beweise: In jedem Dreieck ABC erfüllen für jeden Punkt P im Innern des Dreiecks die Längen $x = PA$, $y = PB$, $z = PC$ und die Längen u, v bzw. w der von P auf die Seiten BC, CA bzw. AB oder deren Verlängerungen gefällten Lote die Ungleichung

$$xyz \geq (v + w)(w + u)(u + v).$$

Aufgabe 301246B:

Für natürliche Zahlen n, k mit $2 \leq k \leq n$ werde eine *Menge N von n Personen* genau dann als *k-familiär* bezeichnet, wenn sich in jeder Menge K von k Personen aus N eine Person befindet, die mit allen anderen Personen aus K bekannt ist.

Ermitteln Sie zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ alle diejenigen natürlichen Zahlen k mit $2 \leq k \leq n$, für die die Aussage gilt, daß jede k-familiäre Menge von n Personen auch n-familiär sein muß!

Hinweise: Für Personen a, b gelte stets: Wenn a mit b bekannt ist, so ist b mit a bekannt. Ferner werde vorausgesetzt, daß jede in einer Menge theoretisch widerspruchsfreie Verteilung gegenseitiger Unbekanntheit oder Bekanntheit auch durch eine *Menge von Personen* realisiert werden kann.