31. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Saison 1991/1992

Aufgaben

31. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 310731:
Bei einer Geburtstagsfeier wurden an die Kinder Bonbons verteilt:

> Das erste Kind bekam 1 Bonbon und ein Zehntel vom verbleibenden Rest,
> Das zweite Kind bekam 2 Bonbons und ein Zehntel vom nun verbleibenden Rest,
> Das dritte Kind bekam 3 Bonbons und ein Zehntel vom nun verbleibenden Rest,
> usw.

Schließlich waren, als dies konsequent fortgesetzt worden war, alle Bonbons verteilt, und es stellte sich heraus, daß jedes Kind dieselbe Anzahl Bonbons erhalten hatte wie jedes andere Kind.

Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl a aller verteilten Bonbons, die Anzahl k aller beteiligten Kinder und die Anzahl b derjenigen Bonbons, die jedes dieser Kinder erhielt! Überprüfe, daß für die von dir ermittelten Anzahlen a, k, b alle obengenannten Angaben zutreffen!

Aufgabe 310732:
Ein Mensch antwortet auf die Frage nach seinem Geburtstag:

> "Im Jahre 1989 wurde ich a Jahre alt. Geboren wurde ich am t-ten Tag des m-ten Monats des Jahres $(1900 + j)$. Die Zahlen a, j, m, t sind natürliche Zahlen; für sie gilt $a \cdot j \cdot m \cdot t = 105\,792$."

Stelle fest, ob die Zahlen a, j, m, t durch diese Angaben eindeutig bestimmt sind! Ist das der Fall, so gib diese Zahlen an!

Aufgabe 310733:
Zu einem gegebenen konvexen Fünfeck $ABCDE$ soll ein Rechteck $FGHJ$ konstruiert werden, das denselben Flächeninhalt wie das Fünfeck $ABCDE$ hat.

a) Beschreibe eine Konstruktion, die mit jedem konvexen Fünfeck $ABCDE$ durchführbar ist und vier Punkte F, G, H, J ergibt!

b) Beweise, daß für jedes konvexe Fünfeck $ABCDE$ die nach deiner Beschreibung konstruierten Punkte die Ecken eines Rechtecks $FGHJ$ sind, das denselben Flächeninhalt wie $ABCDE$ hat!

c) Führe an einem von dir gewählten Fünfeck $ABCDE$ die von dir beschriebene Konstruktion durch!

Hinweis: Ein Fünfeck ist genau dann konvex, wenn es nicht überschlagen ist (d.h. außer den Ecken keine gemeinsamen Punkte zweier Seiten aufweist) und wenn kein Innenwinkel des Fünfecks größer als 180° ist.

Aufgabe 310734:
Wenn für ein Paar von Primzahlen gilt, daß eine Primzahl des Paares um zwei größer ist als die andere, so bezeichnet man dieses Paar als ein Paar von Primzahlzwillingen.

Beweise, daß für jedes Paar von Primzahlzwillingen, die größer als 3 sind, die Summe der beiden Primzahlen dieses Paares stets durch 12 teilbar ist!

Aufgabe 310735:

Ist ABC ein beliebiges Dreieck, so sei S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden AD und BE, ferner bezeichne F_1 den Flächeninhalt des Dreiecks ABC und F_2 den Flächeninhalt des (nicht konvexen) Fünfecks $ABDSE$.

Ermittle für jedes Dreieck ABC das Verhältnis $F_1 : F_2$ dieser beiden Flächeninhalte!

Aufgabe 310736:

Von vier Kreisen k_1, k_2, k_3, k_4 und ihren Mittelpunkten M_1, M_2, M_3, M_4 seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

(1) Es gibt eine Gerade, auf der die drei Punkte M_1, M_2 und M_3 liegen.

(2) Jeder der drei Kreise k_2, k_3 und k_4 berührt den Kreis k_1 von innen.

(3) Je zwei der Kreise k_2, k_3 und k_4 berühren sich gegenseitig von außen.

a) Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets das Dreieck $M_1M_2M_4$ einen ebenso großen Umfang u wie das Dreieck $M_1M_3M_4$ hat!

b) Die Radien von k_1, k_2, k_3, k_4 seien r_1, r_2, r_3, r_4. Zeige, daß eine Vorgabe solcher Radien stets ausreicht, um daraus u zu ermitteln! Drücke u durch möglichst wenig vorzugebende Radien aus!