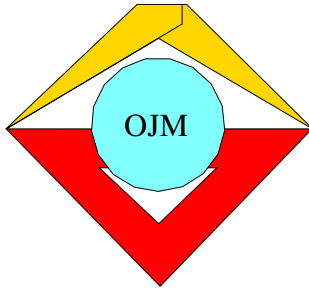




**31. Mathematik Olympiade**  
**3. Stufe (Landesrunde)**  
**Klasse 7**  
**Saison 1991/1992**

Aufgaben





31. Mathematik-Olympiade  
3. Stufe (Landesrunde)  
Klasse 7  
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 310731:

Bei einer Geburtstagsfeier wurden an die Kinder Bonbons verteilt:

Das erste Kind bekam 1 Bonbon und ein Zehntel vom verbleibenden Rest,  
Das zweite Kind bekam 2 Bonbons und ein Zehntel vom nun verbleibenden Rest,  
Das dritte Kind bekam 3 Bonbons und ein Zehntel vom nun verbleibenden Rest,  
usw.

Schließlich waren, als dies konsequent fortgesetzt worden war, alle Bonbons verteilt, und es stellte sich heraus, daß jedes Kind dieselbe Anzahl Bonbons erhalten hatte wie jedes andere Kind.

Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl  $a$  aller verteilten Bonbons, die Anzahl  $k$  aller beteiligten Kinder und die Anzahl  $b$  derjenigen Bonbons, die jedes dieser Kinder erhielt! Überprüfe, daß für die von dir ermittelten Anzahlen  $a$ ,  $k$ ,  $b$  alle obengenannten Angaben zutreffen!

Aufgabe 310732:

Ein Mensch antwortet auf die Frage nach seinem Geburtstag:

”Im Jahre 1989 wurde ich  $a$  Jahre alt. Geboren wurde ich am  $t$ -ten Tag des  $m$ -ten Monats des Jahres  $(1900 + j)$ . Die Zahlen  $a$ ,  $j$ ,  $m$ ,  $t$  sind natürliche Zahlen; für sie gilt  $a \cdot j \cdot m \cdot t = 105\,792$ .”

Stelle fest, ob die Zahlen  $a$ ,  $j$ ,  $m$ ,  $t$  durch diese Angaben eindeutig bestimmt sind! Ist das der Fall, so gib diese Zahlen an!

Aufgabe 310733:

Zu einem gegebenen konvexen Fünfeck  $ABCDE$  soll ein Rechteck  $FGHJ$  konstruiert werden, das denselben Flächeninhalt wie das Fünfeck  $ABCDE$  hat.

- Beschreibe eine Konstruktion, die mit jedem konvexen Fünfeck  $ABCDE$  durchführbar ist und vier Punkte  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $J$  ergibt!
- Beweise, daß für jedes konvexe Fünfeck  $ABCDE$  die nach deiner Beschreibung konstruierten Punkte die Ecken eines Rechtecks  $FGHJ$  sind, das denselben Flächeninhalt wie  $ABCDE$  hat!
- Führe an einem von dir gewählten Fünfeck  $ABCDE$  die von dir beschriebene Konstruktion durch!

*Hinweis:* Ein Fünfeck ist genau dann konvex, wenn es nicht überschlagen ist (d.h. außer den Ecken keine gemeinsamen Punkte zweier Seiten aufweist) und wenn kein Innenwinkel des Fünfecks größer als  $180^\circ$  ist.

Aufgabe 310734:

Wenn für ein Paar von Primzahlen gilt, daß eine Primzahl des Paares um zwei größer ist als die andere, so bezeichnet man dieses Paar als ein Paar von Primzahlzwillingen.



Beweise, daß für jedes Paar von Primzahlzwillingen, die größer als 3 sind, die Summe der beiden Primzahlen dieses Paares stets durch 12 teilbar ist!

Aufgabe 310735:

Ist  $ABC$  ein beliebiges Dreieck, so sei  $S$  der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden  $AD$  und  $BE$ , ferner bezeichne  $F_1$  den Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$  und  $F_2$  den Flächeninhalt des (nicht konvexen) Fünfecks  $ABDSE$ .

Ermittle für jedes Dreieck  $ABC$  das Verhältnis  $F_1 : F_2$  dieser beiden Flächeninhalte!

Aufgabe 310736:

Von vier Kreisen  $k_1, k_2, k_3, k_4$  und ihren Mittelpunkten  $M_1, M_2, M_3, M_4$  seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

- (1) Es gibt eine Gerade, auf der die drei Punkte  $M_1, M_2$  und  $M_3$  liegen.
- (2) Jeder der drei Kreise  $k_2, k_3$  und  $k_4$  berührt den Kreis  $k_1$  von innen.
- (3) Je zwei der Kreise  $k_2, k_3$  und  $k_4$  berühren sich gegenseitig von außen.
  - a) Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets das Dreieck  $M_1M_2M_4$  einen ebenso großen Umfang  $u$  wie das Dreieck  $M_1M_3M_4$  hat!
  - b) Die Radien von  $k_1, k_2, k_3, k_4$  seien  $r_1, r_2, r_3, r_4$ . Zeige, daß eine Vorgabe solcher Radien stets ausreicht, um daraus  $u$  zu ermitteln! Drücke  $u$  durch möglichst wenig vorzugebende Radien aus!