31. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 8
Saison 1991/1992

Aufgaben

31. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 310811:

Auf einem Tisch liegen drei Schachteln. In einer liegen zwei schwarze Kugeln, in der anderen eine schwarze und eine weiße Kugel, in der dritten zwei weiße Kugeln. Die Schachteln tragen die Aufschriften "Zwei schwarze", "Schwarz und weiß", "Zwei weiße"; jedoch trifft keine dieser drei Aufschriften zu.

Untersuche, ob sich bei diesen Voraussetzungen durch Herausnehmen einer einzigen Kugel, ohne daß die anderen Kugeln gesehen werden, eindeutig die Verteilung der Kugeln ermitteln läßt! Ist das der Fall, dann gib an, wie dies geschehen kann!

Aufgabe 310812:

Rudolf macht folgende Aussage:

> "Für je drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gilt stets: Multipliziert man die kleinste dieser drei Zahlen mit der mittleren und addiert zum Ergebnis das Produkt aus der mittleren und der größten der drei Zahlen, so ist die entstandene Summe gleich dem doppelten Quadrat der mittleren Zahl."

a) Überprüfe, ob diese Gleichheit in einigen selbstgewählten Beispielen zutrifft!

b) Beweise oder widerlege Rudolfs Aussage!

Aufgabe 310813:

Dirk zeichnet an einen Kreis k zwei Tangenten, die sich in einem Punkt P außerhalb von k schneiden. Den Mittelpunkt des Kreises nennt er M, die Berührungspunkte der Tangenten A bzw. B. Nun stellt er fest, daß der Winkel $\sphericalangle AMB$ die gleiche Größe hat wie einer der Schnittwinkel der beiden Tangenten.

a) Konstruiere einen Kreis, dazu zwei Tangenten und die von Dirk betrachteten Winkel!

b) Beweise, daß Dirks Feststellung stets für beliebige (sich schneidende) Tangenten eines Kreises zutrifft!

Aufgabe 310814:

Gegeben seien ein Kreis k und ein Punkt P, der innerhalb von k liegt, aber verschieden ist vom Mittelpunkt M des Kreises k.

Zu konstruieren sind zwei Sehnen s_1 und s_2 des Kreises k, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) s_1 und s_2 schneiden einander in P.

(2) s_1 und s_2 stehen aufeinander senkrecht.

(3) s_1 und s_2 haben einander gleiche Länge.

a) Beschreibe eine Konstruktion, durch die zu gegebenem Kreis k und gegebenem Punkt P zwei Sehnen s_1 und s_2 erhalten werden! Führe die beschriebene Konstruktion durch!

b) Beweise, daß zwei Sehnen, die nach Deiner Beschreibung konstruiert werden, stets die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!