31. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 8
Saison 1991/1992

Aufgaben

31. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 310831:

Eine Schachtel B ist mit blauen Kugeln gefüllt, eine andere Schachtel R mit roten Kugeln. Die Anzahl der roten Kugeln beträgt $\frac{15}{17}$ der Anzahl der blauen Kugeln.

Aus der Schachtel B kann man $\frac{2}{5}$ ihres Inhalts herausnehmen; danach enthält sie immer noch mehr als 1 000 Kugeln. Aus der Schachtel R kann man $\frac{3}{7}$ ihres Inhalts herausnehmen; danach enthält sie weniger als 1 000 Kugeln.

Untersuche, ob durch diese Angaben die Anzahlen der Kugeln eindeutig bestimmt sind, die ursprünglich in den Schachteln waren! Wenn das der Fall ist, nenne diese beiden Anzahlen!

Aufgabe 310832:

Sechs Spieler trugen ein Schachturnier aus, in dem jeder Spieler gegen jeden anderen genau eine Partie spielte. Wie üblich gab es bei einem unentschiedenen Spiel für jeden der beiden Spieler einen halben Punkt und sonst für den Gewinner 1 Punkt, für den Verlierer 0 Punkte. Nach dem Abschluß des Turniers machte ein Beobachter die Feststellung, daß keine zwei der sechs Spieler die gleiche Punktzahl erreicht hatten.

Gesucht ist die größtmögliche Punktzahl, die in einem solchen Turnier für den Letztplatzierten (d.h. für den Spieler mit der niedrigsten Punktzahl) erreichbar ist.

a) Nenne diese Zahl und beweise, daß für den Letztplatzierten keine größere Punktzahl möglich ist, wenn nur vorausgesetzt wird, daß die Feststellung des Beobachters zutrifft!

b) Zeige ferner - z. B. mit einer möglichen Ergebnistabelle der einzelnen Spiele -, daß es Ergebnisse geben kann, bei denen (die Feststellung des Beobachters zutrifft und) der Letztplatzierte die von dir genannte Punktzahl wirklich erreicht!

Aufgabe 310833:

Gegeben sei ein Dreieck ABC. Auf der Seite BC dieses Dreiecks seien ferner ein Punkt D zwischen B und C sowie ein Punkt E zwischen D und C gegeben. Gesucht sind zwei Punkte F, G, mit denen die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

(1) F liegt auf AC.

(2) G liegt auf AB.

(3) $DEFG$ ist ein Parallelogramm.

a) Beweise, daß für jedes Dreieck ABC mit den Punkten D, E in beschriebener Lage gilt: Wenn zwei Punkte F, G die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen, dann können sie (aus den gegebenen A, B, C, E) konstruiert werden;

b) Beschreibe eine solche Konstruktion!

c) Beweise, daß auch umgekehrt F und G, wenn sie nach deiner Beschreibung konstruiert werden, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

d) Wähle A, B, C, D, E wie genannt und führe die von dir beschriebene Konstruktion durch!

Aufgabe 310834:

Untersuche für alle rationalen Zahlen a, b mit $a \geq 2$, $b \geq 2$, ob bzw. unter welchen Bedingungen das Produkt der Zahlen a, b kleiner als die Summe, gleich der Summe oder größer als die Summe von a und b ist!

Aufgabe 310835:

Es sei $ABCDEF$ ein gerades dreiseitiges Prisma mit $AD \parallel BE \parallel CF$. Die Deckfläche DEF sei ein rechtwinkliges Dreieck mit E als Scheitel des rechten Winkels. Weiterhin sei S der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Dreiecks DEF.

Beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets $\overline{SB} < \overline{SA}$ folgt!

Aufgabe 310836:

Von einem Dreieck ABC sind gegeben:

Die Seitenlänge $a = \overline{BC} = 845\,\text{cm}$ die Länge $h_a = \overline{AE} = 840\,\text{cm}$ der auf BC senkrechten Höhe und die Länge $h_c = \overline{CD} = 780\,\text{cm}$ der auf AB senkrechten Höhe.

Berechne für jedes Dreieck ABC, bei dem diese Längen auftreten, die Seitenlängen $c = \overline{AB}$ und $b = \overline{AC}$!