31. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 9
Saison 1991/1992

Aufgaben

31. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 310921:

a) Geben Sie eine natürliche Zahl n an, für die (im dekadischen Positionssystem) die Bedingung erfüllt ist, daß sowohl die Quersumme von n als auch die Quersumme von $n + 1$ durch 10 teilbar sind! Überprüfen Sie, daß die von Ihnen angegebene Zahl diese Bedingung erfüllt!

b) Geben Sie die kleinste natürliche Zahl an, die die in a) genannte Bedingung erfüllt! Beweisen Sie für die von Ihnen angegebene Zahl, daß es sich um die kleinste Zahl mit dieser Bedingung handelt!

Aufgabe 310922:

Gegeben seien zwei beliebige, voneinander verschiedene Punkte A und B.

Konstruieren Sie nur mit dem Zirkel einen von A und B verschiedenen Punkt C, für den $\sphericalangle ABC$ ein rechter Winkel ist! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion! Beweisen Sie: Wenn ein Punkt C nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, dann ist $\sphericalangle ABC$ ein rechter Winkel!

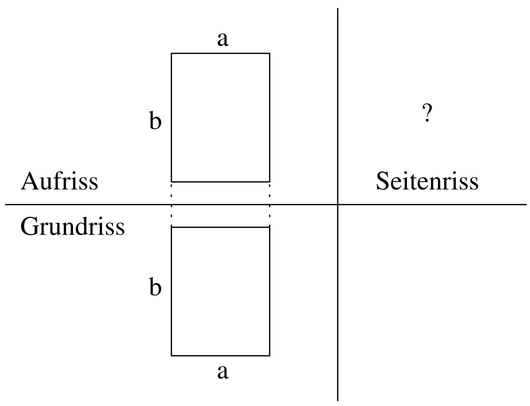
Hinweis: Man sagt, eine Konstruktion sei "nur mit dem Zirkel" ausgeführt, wenn jeder Konstruktionsschritt darin besteht, daß um einen Punkt M ein Kreis konstruiert wird, dessen Radius gleich dem Abstand zweier Punkte P, Q ist (für die auch $M = P$ oder $M = Q$ sein darf), wobei die Punkte M, P, Q entweder gegebene oder beliebig gewählte oder zuvor konstruierte Punkte sind. Als "nur mit dem Zirkel konstruiert" gilt dann jeder Punkt, der als gemeinsamer Punkt von (mindestens) zwei solchen Kreisen zu erhalten ist.

Aufgabe 310923:

Wenn bei der Abbildung eines Körpers in Zweitafelprojektion die Grund- und Aufrißbilder nicht für eine eindeutige Festlegung ausreichen, kann man einen Seitenriß hinzufügen und damit zur Dreitafelprojektion übergehen.

Die Abbildung zeigt zwei Rechtecke (mit gegebenen Seitenlängen a, b) als Grund- und Aufriß eines Körpers. (Es wird nicht gefordert, daß der Körper nur von ebenen Flächen begrenzt wird.)

Ergänzen Sie die Risse in drei verschiedenen Zeichnungen so durch Seitenrisse, daß die Bilder von drei Körpern entstehen, von denen keine zwei das gleiche Volumen haben!

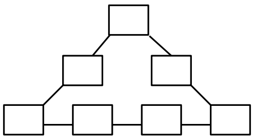


Bezeichnen Sie in Ihren Darstellungen alle an den Körpern auftretenden Ecken! (Grund-, Auf- und Seitenriß eines Punktes P bezeichne man mit P', P'' bzw. P'''; eventuell auftretende Kanten, die von Flächen verdeckt sind, zeichne man gestrichelt.)

Geben Sie in Abhängigkeit von a und b die Volumina der drei dargestellten Körper an!

Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 310924:



In die Felder der Abbildung sollen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 so eingetragen werden, daß jede Zahl genau einmal vorkommt und daß die Zahlen auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe ergeben.

Ermitteln Sie alle derartigen Eintragungen, die nicht durch Spiegelung ineinander überführt werden können!