31. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 10
Saison 1991/1992

Aufgaben

31. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 311011:
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare $(x; y)$ positiver natürlicher Zahlen x und y, für die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$x + y < 1\,991. \tag{1}$$

Aufgabe 311012:
Von einem Quader sind gegeben: das Volumen $24\,552\,\text{cm}^3$, der Oberflächeninhalt $17\,454\,\text{cm}^2$ und die Länge $3\,\text{cm}$ einer Kante. Inge und Rolf wollen die Längen der anderen Kanten ermitteln.

Inge sagt, daß sie Lösung mit Hilfe einer quadratischen Gleichung gefunden hat und daß die gesuchten Längen, in cm gemessen, ganzzahlig sind.

Rolf entgegnet, er könne quadratische Gleichungen noch nicht lösen; aber wenn die Ganzzahligkeit der gesuchten Längen bekannt sei, so seien seine BASIC-Kenntnisse ausreichend, um die Aufgabe mit Hilfe eines Computers zu lösen.

Wie könnte die Aufgabe von Inge gelöst worden sein, und wie von Rolf?

Aufgabe 311013:
Eine Funktion f (die in einem Intervall reeller Zahlen definiert ist und reelle Funktionswerte hat) heißt genau dann streng konkav, wenn für alle $x_1 \neq x_2$ ihres Definitionsbereiches und alle positiven q_1, q_2 mit $q_1 + q_2 = 1$ die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$f(q_1 x_1 + q_2 x_2) > q_1\, f(x_1) + q_2\, f(x_2). \tag{1}$$

Man beweise: Wenn f eine für alle reellen Zahlen definierte streng konkave Funktion ist, dann gilt für alle reellen u, v mit $u \neq v$ die Ungleichung

$$f(u) + f(v) < 2 \cdot f\left(\frac{u+v}{2}\right), \tag{2}$$

und es gelten für alle reellen a, b mit $b \neq 0$ die Ungleichungen

$$f(a) + f(a + 2b) < 2 \cdot f(a + b), \tag{3}$$
$$f(a) + f(a + 3b) < f(a + b) + f(a + 2b). \tag{4}$$

Aufgabe 311014:
Zur Abbildung wurde als Beschreibung hinzugefügt, sie sei Grundriß und zugehöriger Höhenmaßstab eines ebenflächig begrenzten Körpers. Dieser habe A, B, C, D, E, F als Eckpunkte.

$A'B'C'D'$ ist ein Quadrat, $E' = F'$ sein Diagonalenschnittpunkt; im Höhenmaßstab ist die Strecke, die den Höhenunterschied zwischen A und E angibt, in drei gleichlange Teilstrecken geteilt.

Weisen Sie nach, daß die Abbildung zusammen mit der obigen Beschreibung widerspruchsvoll ist! Führen Sie eine Änderung durch, die den Widerspruch beseitigt!