



31. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 10
Saison 1991/1992

Aufgaben





31. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 311021:

Beim Schachspiel darf die Dame auf dem Schachbrett waagrecht, senkrecht und diagonal um eine beliebige Anzahl Felder gezogen werden. Man sagt auch, diese Felder werden von der Dame bedroht. So sind in der Abbildung von der Dame auf c6 genau die angekreuzten Felder bedroht.

8	x		x		x			
7		x	x	x				
6	x	x	D	x	x	x	x	x
5		x	x	x				
4	x		x		x			
3			x			x		
2			x				x	
1			x					x
	a	b	c	d	e	f	g	h

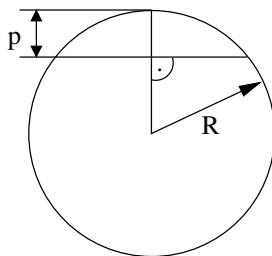
LEONHARD EULER (1707 - 1783) behandelte die Aufgabe, auf einem Schachbrett 8 Damen so aufzustellen, daß keine dieser Damen eine andere bedroht. Wir wollen die Aufgabe hier durch die Zusatzforderung vereinfachen, daß keine der 8 Damen auf eines der 16 Felder gestellt werden darf, die sowohl den Zeilen 3, 4, 5, 6 als auch den Spalten c, d, e, f angehören.

Man ermittle alle Aufstellungen, die diese Forderungen erfüllen.

Hinweis : Die *verbotenen* Felder wirken nicht etwa als *Sperre der Bedrohung*; z.B. bedroht eine Dame auf b3 auch die Felder g3, h3, f7 und g8.

Aufgabe 311022:

Eine Kugel K wird zylindrisch so durchbohrt, daß die Achse der Bohrung durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Danach bleibt von der Kugel ein Restkörper C übrig. Dieser ringförmige Körper C hat zwei kreisförmige Kanten; als einzige Größenangabe bekannt sei die Länge h einer zur Bohrungssachse parallelen Strecke, die einen Punkt der einen Kante mit einem Punkt der anderen Kante verbindet.



Andrea behauptet, allein aus h könne man das Volumen $V(C)$ von C ermitteln. Birgit meint dagegen: Da sich der genannte Wert h ausgehend von unterschiedlich großen Kugeln (Radius R) durch jeweils zu R passende Wahl des Radius r der zylindrischen Bohrung habe erreichen lassen, müßten zu diesem h unterschiedliche Werte $V(C)$ möglich sein; man könne also, wenn man weder R noch r kennt, $V(C)$ nicht allein aus h ermitteln. - Wer hat recht?

Hinweis : Für das Volumen $V(K)$, $V(A)$, $V(Z)$ einer Kugel K (Radius R) bzw. eines Kugelabschnitts A (Pfeilhöhe p siehe Abbildung) bzw. eines Zylinders Z (Grundkreisradius r , Höhe h) gelten die Formeln

$$V(K) = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad V(A) = \pi R p^2 - \frac{1}{3}\pi p^3, \quad V(Z) = \pi r^2 h.$$

Aufgabe 311023:

Man beweise, daß sich in einer Ebene 100 verschiedene Geraden so legen lassen, daß die Anzahl aller derjenigen Punkte, die Schnittpunkt von je mindestens zwei der 100 Geraden sind, genau 1991 beträgt.



Aufgabe 311024:

Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen t , für die $\sqrt{t + 24\sqrt{t}}$ rational ist!