31. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 10
Saison 1991/1992

Aufgaben

31. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 311031:

Beweisen Sie,

a) daß $\dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 22 \cdot 24}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot 23 \cdot 25} > \dfrac{1}{5}$ gilt,

b) daß für jede natürliche Zahl $m \geq 2$ die Ungleichung $\dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2m-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot (2m-1)} > \dfrac{1}{\sqrt{2m-1}}$ gilt!

Aufgabe 311032:

Man ermittle und zeichne in einem x, y-Koordinatensystem alle diejenigen Punkte, deren Koordinaten $(x; y)$

a) die Gleichung $[x]^2 + [y]^2 = 1$,

b) die Gleichung $[x^2] + [y^2] = 1$

erfüllen. Gegebenenfalls ist jeweils durch einen der Zeichnung beigefügten Text zu sichern, daß für jeden Punkt der Ebene eindeutig aus der Darstellung hervorgeht, ob er zur Menge der anzugebenden Punkte gehört oder nicht.

Hinweis : Ist z eine reelle Zahl, so wird diejenige ganze Zahl g, für die $g \leq z < g + 1$ gilt, mit $g = [z]$ bezeichnet.

Aufgabe 311033:

Es sei $ABCDS$ eine Pyramide; ihre Grundfläche sei ein Quadrat $ABCD$, das Lot von der Spitze S auf die Grundfläche habe als Fußpunkt den Diagonalenschnittpunkt M des Quadrates $ABCD$. Ferner sei H der Mittelpunkt der Strecke MS; das Lot von H auf die Seitenfläche BCS habe den Fußpunkt F, das Lot von H auf die Kante CS habe den Fußpunkt K.

Unter diesen Voraussetzungen berechne man aus den gegebenen Längen $f = \overline{HF}$ und $k = \overline{HK}$ das Volumen der Pyramide $ABCDS$.

Aufgabe 311034:

a) Untersuchen Sie, wie viele rationale Zahlen t es insgesamt gibt, die den folgenden drei Bedingungen (1), (2), (3) genügen

(1) Es gilt $t > 1$.

(2) Die Zahl $\sqrt{t + \sqrt{t}}$ ist rational.

(3) In der Darstellung $t = \frac{n}{m}$ als vollständig gekürzter Bruch zweier natürlicher Zahlen n, m ist $n = 1\,000$.

b) Lösen Sie dieselbe Aufgabe, wenn in der Bedingung (3) die Gleichung $n = 10\,000$ anstelle von $n = 1\,000$ steht!

Aufgabe 311035:

Es sei $ABCD$ ein gegebenes Parallelogramm. Für jeden Punkt P, der auf der Strecke AB liegt, sei S der Schnittpunkt der Strecken AC und PD.

a) Für welche Lage von P auf AB ist der Flächeninhalt des Dreiecks SPC gleich einem Sechstel des Flächeninhalts des Parallelogramms $ABCD$?

b) Für welche Lage von P auf AB ist der Flächeninhalt des Dreiecks SPC möglichst groß?

Aufgabe 311036:

Beweisen Sie, daß es unendlich viele verschiedene Paare (f, g) von Funktionen gibt, für die die folgenden Aussagen (1), (2) und (3) gelten :

(1) Die Funktionen f und g sind für alle reellen Zahlen x definiert.

(2) Es gilt $f(0) = 1\,992$.

(3) Für jedes reelle x gilt $\dfrac{g(x) \cdot f(x+1)}{f(x)} = g(2x) + 1$.

Hinweis : Zwei Paare (f_1, g_1) und (f_2, g_2) von Funktionen, die für alle reellen Zahlen x definiert sind, sind genau dann voneinander verschieden, wenn es (mindestens) eine reelle Zahl x gibt, für die (mindestens) eine der Ungleichungen $f_1(x) \neq f_2(x)$, $g_1(x) \neq g_2(x)$ gilt.