# 31. Mathematik Olympiade
# 3. Stufe (Landesrunde)
# Klasse 12
# Saison 1991/1992

Aufgaben

# 31. Mathematik-Olympiade
# 3. Stufe (Landesrunde)
# Klasse 12
# Aufgaben

<u>Hinweis:</u> *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

## Aufgabe 311231:

Es sei $f$ eine Funktion, die für alle reellen Zahlen $x$ definiert ist; ferner sei folgende Voraussetzung erfüllt: Mit zwei voneinander verschiedenen reellen Zahlen $a$, $b$ gelten für jedes reelle $x$ die Gleichungen $f(a-x) = f(a+x)$ und $f(b-x) = f(b+x)$.

Man beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt : Die Funktion $f$ ist periodisch.

*Hinweis:* Eine Funktion $f$ heißt genau dann periodisch, wenn eine positive reelle Zahl $p$ existiert, mit der für jedes reelle $x$ die Gleichung $f(x+p) = f(x)$ gilt.

## Aufgabe 311232:

Man beweise, daß jedes konvexe Viereck $ABCD$, in dem die Seitenlängen $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$ betragen und die Innenwinkel $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$ die Größen $\beta$ bzw. $\gamma$ haben, den Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{2}\left(ab \cdot \sin\beta + bc \cdot \sin\gamma - ac \cdot \sin(b+y)\right) \quad \text{hat.}$$

## Aufgabe 311233A:

Man beweise, daß es unter allen Werten, die der Term

$$\sqrt{x^2+y^2+2x+1} + \sqrt{x^2+y^2-2x-2y+2} + \sqrt{x^2+y^2+4x-2y+5} + \sqrt{x^2+y^2+-4x+4y+8}$$

für reelle Zahlen $x$, $y$ annehmen kann, einen kleinsten Wert gibt, und man ermittle diesen kleinsten Wert.

## Aufgabe 311223B:

Es sei $n \geq 2$ die Anzahl der Teilnehmer an einer Feier. Für je zwei Teilnehmer $A$, $B$ seien die folgenden beiden Aussagen wahr:

(1) Ist $A$ mit $B$ bekannt, so gibt es keinen von $A$ und $B$ verschiedenen Teilnehmer, der sowohl mit $A$ als auch mit $B$ bekannt wäre.

(2) Ist $A$ nicht mit $B$ bekannt, so gibt es genau zwei von $A$ und $B$ verschiedene Teilnehmer, die sowohl mit $A$ als auch mit $B$ bekannt sind.

Man beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets gilt: Alle Teilnehmer haben auf dieser Feier dieselbe Zahl von Bekannten.

*Hinweis:* Für je zwei Teilnehmer $A$, $B$ gelte: Ist $A$ mit $B$ bekannt, so auch $B$ mit $A$. Kein Teilnehmer gelte als mit sich selbst bekannt.

Aufgabe 311234:

Für jede natürliche Zahl $a > 0$ ermittle man alle diejenigen natürlichen Zahlen $n > 0$, die die Ungleichung

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{3n+1} > a \quad \text{erfüllen.}$$

Aufgabe 311235:

Man untersuche, ob sich unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 100 fünfzig verschiedene so auswählen lassen, daß ihre Summe 2 525 beträgt und daß keine zwei von ihnen die Summe 101 haben.

Aufgabe 311236:

Es seien alle diejenigen Pyramiden $ABCS$ betrachtet, die den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:

(1) Die Grundfläche $ABC$ der Pyramide hat den Flächeninhalt 1.

(2) Es gilt $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{SB} = \overline{SC}$.

(3) Es gilt $\overline{BC} = \overline{SA}$.

Man untersuche, ob es unter allen Pyramiden, die diese Bedingungen erfüllen, eine mit größtem Volumen gibt. Wenn dies der Fall ist, so ermittle man für eine solche Pyramide die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$.