31. Mathematik Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 12
Saison 1991/1992

Aufgaben

31. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 311241:

Es sei

$$x = e^{0{,}000009} - e^{0{,}000007} + e^{0{,}000002} - e^{0{,}000001}, \qquad y = e^{0{,}000008} - e^{0{,}000005}.$$

Man untersuche, ob $x = y$ oder $x > y$ oder $x < y$ gilt.

Aufgabe 311242:

Auf einem Kreis k seien A_1, A_2 und P drei paarweise verschiedene Punkte; die Strecke A_1A_2 sei kein Durchmesser von k. Für $i = 1; 2$ sei jeweils k_i ein Kreis, der k von außen in A_i berührt, und B_i sei der von A_i verschiedene Schnittpunkt des Kreises k_i mit der Geraden durch P und A_i. Der Mittelpunkt von k_i sei M_i.

Man beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets die durch A_1, A_2 bzw. durch B_1, B_2 bzw. durch M_1, M_2 gelegten Geraden a bzw. b bzw. m entweder alle drei genau einen Punkt gemeinsam haben oder alle drei zueinander parallel sind.

Aufgabe 311243:

Man beweise: Ist p eine Primzahl und werden zwei ganze Zahlen n, k mit $0 \leq k \leq n$ im Ziffernsystem mit der Basis p geschrieben als

$$\begin{aligned} n &= a_t \cdot p^t + a_{t-1} \cdot p^{t-1} + ... + a_1 p + a_0, \\ k &= b_t \cdot p^t + b_{t-1} \cdot p^{t-1} + ... + b_1 p + b_0 \end{aligned}$$

(a_j, b_j ganze Zahlen mit $0 \leq a_j < p$, $0 \leq b_j < p$ für $j = 0, 1, ..., t$), so läßt die Zahl $\binom{n}{k}$ bei Division durch p denselben Rest wie

$$\binom{a_t}{b_t} \cdot \binom{a_{t-1}}{b_{t-1}} \cdot ... \cdot \binom{a_1}{b_1} \cdot \binom{a_0}{b_0}.$$

Hinweis: Für ganze Zahlen $n \geq 0$ und $k \geq 1$ wird

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k} \quad \text{definiert, für ganze Zahlen } n \geq 0 \text{ ferner} \quad \binom{n}{0} = 1$$

Aufgabe 311244:

Es sei $P_1P_2P_3$ ein gegebenes beliebiges Dreieck; sein Flächeninhalt sei F, sei Inkreis habe den Mittelpunkt M und den Radius r.

a) Man beweise, daß eine Pyramide $P_1P_2P_3S$ genau dann unter allen Pyramiden $P_1P_2P_3S$ mit dieser Grundfläche $P_1P_2P_3$ und mit gegebenem Volumen V einen kleinstmöglichen Oberflächeninhalt hat, wenn das Lot von S auf die durch P_1, P_2, P_3 gelegte Ebene den Fußpunkt M hat.

b) Man beweise, daß dieser kleinstmögliche Oberflächeninhalt $F + \sqrt{F^2 + \left(\frac{3V}{r}\right)^2}$ beträgt.

Aufgabe 311245:

Es sei a eine beliebige reelle Zahl mit $a \geq 2$. Man ermittle zu a alle Funktionen, die den nachstehenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:

(1) Die Funktion f ist für alle nichtnegativen ganzen Zahlen x definiert; alle Funktionswerte $f(x)$ sind reelle Zahlen.

(2) Für alle nichtnegativen ganzen Zahlen x, y mit x, y mit $x \geq y$ gilt: $f(x) \cdot f(y) = f(x+y) + f(x-y)$.

(3) Es gilt $f(1) = a$.

Bemerkung: f soll als *elementare Funktion in geschlossenem Ausdruck* angegeben werden, d.h.: Die formelmäßige Angabe der Funktionswerte $f(x)$ soll dadurch erfolgen, daß auf x sowie auf Konstanten, Potenz-, Exponentialfunktionen, trigonometrische Funktionen von x oder auf Umkehrfunktionen solcher Funktionen Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) angewandt werden, und zwar in einer von x unabhängigen Anzahl der Anwendungsschritte.

Aufgabe 311246A:

Man untersuche, ob es eine Anzahl $n \geq 2$ sowie eine positive reelle Zahl c und n positive reelle Zahlen a_i $(i = 1, 2, ..., n)$ derart gibt, daß die Summe der a_i gleich $n \cdot c$, die Summe der Quadrate der a_i gleich $2n \cdot c^2$ und mindestens eine der Zahlen a_i größer als $(1 + \sqrt{n-1}) \cdot c$ ist.

Aufgabe 311246B:

In einem utopischen Roman ist von einem unendlich lange lebenden Autor die Rede. An jedem Tag schreibt er einen Text, mit dem er mindestens ein Blatt Papier füllt und, wenn er an diesem Tag noch weitere Blätter beginnt, auch jedes dieser Blätter am gleichen Tag füllt. Im Lauf jedes Jahres füllt er auf diese Weise eine Anzahl Blätter; für verschiedene Jahre können diese Anzahlen verschieden sein, in keinem Jahr jedoch beträgt diese Anzahl mehr als 730.

Man beweise: Im Leben dieses Autors gibt es für jede positive ganze Zahl n einen Zeitraum von aufeinanderfolgenden Tagen, in dem der Autor genau n Blätter füllt.

Hinweis: Es wird vorausgesetzt, daß die derzeit gültige Regel unendlich lange gilt, wonach sich stets unter acht aufeinanderfolgenden Jahren mindestens ein Schaltjahr mit 366 Tagen befindet, während jedes Nicht-Schaltjahr aus 365 Tagen besteht.