32. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 10
Saison 1992/1993

Aufgaben

32. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 321011:

Bernd rechnet mit einem einfachen Taschenrechner. Als Ergebnis der Aufgabe 1:7 erhält er die mit 7 Stellen nach den Dezimalpunkt gezeigte Zahl 0.1428571.

Nun meint er: Man kann den wahren Dezimalbruch finden, ohne noch einen weiteren Schritt zahlenmäßigen Rechnens durchführen zu müssen. Es gibt aber auch die Möglichkeit, mit nur einem einfachen weiteren Rechenschritt auszukommen.

Beschreiben und begründen Sie, wie der gesuchte Dezimalbruch auf eine dieser Arten gefunden werden kann!

Aufgabe 321012:

Drei natürliche Zahlen a, b, c mit $0 < a \leq b < c$, für die die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, nennt man ein Pythagoreisches Zahlentripel.

Man beweise: In jedem Pythagoreischen Zahlentripel a, b, c muß $a \neq 2$ sein.

Aufgabe 321013:

In einer Urne liegen 10 Kugeln, auf denen die Zahlen von 1 bis 10 stehen, jede dieser Zahlen auf genau einer Kugel.

Zwei Spieler A und B ziehen abwechselnd je eine Kugel (ohne dabei die Zahl auf ihr zu kennen). Nachdem so jeder Spieler fünf der Kugeln erhalten hat, werden folgendermaßen Punkte vergeben: A bekommt genau dann einen Punkt, wenn die Summe der Zahlen auf seinen Kugeln durch 2 teilbar ist; B bekommt genau dann einen Punkt, wenn die Summe der Zahlen auf seinen Kugeln durch 3 teilbar ist.

a) Zeigen Sie, daß die folgenden vier Ergebnisse eines Spiels möglich sind:

   Beide Spieler bekommen einen Punkt;
   keiner bekommt einen Punkt;
   nur A bekommt einen Punkt;
   nur B bekommt einen Punkt.

b) Es werde eine große Zahl solcher Spiele gespielt (damit dies möglich ist, werden nach jedem Spiel die Kugeln wieder in die Urne gelegt).

   Gefragt wird, wie oft dabei A und wie oft B einen Punktgewinn erwarten kann.

Geben Sie ein Computerprogramm an, das die Beantwortung dieser Frage unterstützt! Schätzen Sie ein, ob Ihr Programm Vermutungen oder genauer gesicherte Aussagen (über die Punktzahlen im Verhältnis zur Zahl der Spiele) ermöglicht!

Aufgabe 321014:

Wir betrachten ein Quadrat, das sich aus 25 kongruenten Teilquadraten zusammensetzt. Mit 5 verschiedenen Farben werden je 5 Teilquadrate gefärbt; dadurch entstehen 5 einfarbige Muster. Für jedes solche Muster kann man feststellen, ob es eine Symmetrieachse hat, die zugleich Symmetrieachse für das ganze Quadrat (ohne Berücksichtigung der Farben) ist. Eine solche Symmetrieachse eines Musters werde *zulässig* genannt.

		1	1	1
2		2	1	
	2			
2		2		
			1	

In der Abbildung beispielsweise hat das Muster der Farbe 1 keine *zulässige* Symmetrieachse; dagegen hat das Munter der Farbe 2 die angedeutete *zulässige* Symmetrieachse. (Seine drei anderen Symmetrieachsen sind nicht *zulässig*.)

Ermitteln Sie, ob es möglich ist, eine Färbung anzugeben, bei der jedes der 5 Muster genau eine *zulässige* Symmetrieachse hat, und zwar so, daß

a) nur eine der Symmetrieachsen des ganzen Quadrates,

b) jede der vier Symmetrieachsen des ganzen Quadrates

unter den Symmetrieachsen der Muster vorkommt.