



32. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 10
Saison 1992/1993

Aufgaben





32. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 321031:

Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen x, y , für die

$$19 < x^2 + y^2 < 93 \quad \text{gilt!}$$

Aufgabe 321032:

Gegeben sei ein Quadrat und eine positive ganze Zahl n . Jemand möchte ein Rechteck konstruieren, das denselben Flächeninhalt, aber einen n mal so großen Umfang wie das Quadrat hat.

- Beweisen Sie, daß es bis auf Kongruenz genau ein solches Rechteck gibt!
- Beweisen Sie, daß ein solches Rechteck mit Lineal und Zirkel aus der Seitenlänge des gegebenen Quadrats konstruierbar ist!

Aufgabe 321033:

Zeigen Sie, daß es möglich ist, einer Kugel acht einander kongruente gerade Kreiskegel möglichst großer Höhe so einzubeschreiben, daß jeder dieser Kegel genau drei andere von ihnen jeweils längs einer gemeinsamen Mantellinie berührt!

Ermitteln Sie aus dem gegebenen Kugelradius R den Grundradius r und die Höhe h solcher Kegel!

Aufgabe 321034:

Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel $(x; y; z)$ natürlicher Zahlen x, y, z , für die

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5} \quad \text{gilt!}$$

Aufgabe 321035:

Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl k mit $k > 1$ die folgende Aussage gilt:

Wenn die im Positionssystem der Basis k mit genau n Ziffern 1 geschriebene Zahl $11 \dots 1$ eine Primzahl ist, dann ist n eine Primzahl.

Aufgabe 321036:

Ermitteln Sie zu jedem spitzwinkligen Dreieck ABC alle diejenigen Punkte P , für die jedes der drei Spiegelbilder von P , gebildet durch die Spiegelung an den Dreiecksseiten, auf dem Umkreis des Dreiecks liegt!