32. Mathematik Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 10
Saison 1992/1993

Aufgaben

32. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 321041:

Gibt es in einer Ebene mit einem x, y-Koordinatensystem eine Kreislinie, die keinen Punkt hat, für den beide Koordinaten rationale Zahlen sind?

Aufgabe 321042:

Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ denke man sich in

$$p_n(x) = \left(x^2 + x + 1\right)^n$$

auf der rechten Seite durch genügend häufiges Ausmultiplizieren alle Klammern beseitigt und den entstehenden Ausdruck nach Potenzen von x geordnet, so dass in dem (so geschriebenen) Polynom jede Potenz von x genau einen *Koeffizienten* erhält (eine Zahl, die als Faktor bei dieser Potenz steht).

a) Beweisen Sie, daß für *jede* natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: Bei dieser Darstellung von $p_n(x)$ sind *mindestens drei* Koeffizienten ungerade.

b) Beweisen Sie, dass es *unendlich* viele natürliche Zahlen n gibt, für die gilt: Bei dieser Darstellung von $p_n(x)$ sind *genau drei* Koeffizienten ungerade.

Aufgabe 321043A:

Zeigen Sie, daß es ein ebenes Vieleck $P_1P_2P_3 \dots P_{n-1}P_n$ gibt, für das folgende Aussagen gelten:

(1) Die Randlinie des Vielecks hat keine Selbstüberschneidung, das heißt: Außer den gemeinsamen Eckpunkten aufeinanderfolgender Seiten P_1P_2, P_2P_3; P_2P_3, P_3P_4; $\dots$; $P_{n-2}P_{n-1}$, $P_{n-1}P_n$; $P_{n-1}P_n$, P_nP_1; P_nP_1, P_1P_2 gibt es keine gemeinsamen Punkte von irgend zwei Seiten.

(2) Es gibt zwei aufeinanderfolgende Ecken P_k, P_{k+1} $(2 < k < n-1)$, für die Folgendes gilt:

(2.1) Bei einer geeigneten Drehung um P_1 geht der Streckenzug $P_1P_2 \dots P_{k-1}P_k$ in den Streckenzug $P_1\ P_n\ \dots\ P_{k+2}\ P_{k+1}$ über.

(2.2) Bei der Punktspiegelung an einem geeigneten Punkt Q wird der Streckenzug $P_1P_2 \dots P_kP_{k+1}$ auf sich selbst (in umgekehrter Durchlaufung, also auf den Streckenzug $P_{k+1}P_k \dots P_2P_1$) abgebildet.

Als Lösung genügt eine Zeichnung, an der diese Aussagen genügend genau zu bestätigen sind. Eine Beschreibung oder Begründung wird nicht verlangt. Freilich können Sie genaues Zeichnen auch durch - dann lückenlos zu gebende - Konstruktionsbeschreibung ersetzen.

Aufgabe 321043B:

Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen a, b, für die sich bei Division des Polynoms

$$f(x) = x^4 + 2ax^3 + 2x^2 + x - 2$$

durch das Polynom

$$g(x) = x^2 + ax + b$$

erweist, daß ohne Rest ein Polynom $h(x)$ entsteht (mit dem also für jede Zahl x, für die $g(x) \neq 0$ ist, die Gleichung $f(x) : g(x) = h(x)$ gilt).

Aufgabe 321044:

Jemand stellt durch Ausrechnen genügend vieler Ziffern der Zahl 2^n für alle natürlichen Zahlen n aus $\{10, 11, 12, \ldots, 108, 109\}$ fest:

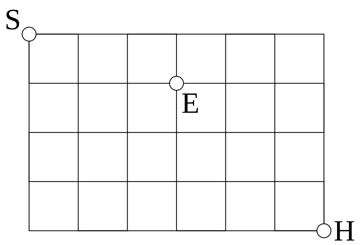
(*) Als Zifferngruppe der letzten drei Ziffern (Hunderter-, Zehner- und Einerziffer) tritt bei keiner der Zahlen 2^n mit $n \in \{11, 12, \ldots, 108, 109\}$ die Zifferngruppe 024 auf, die bei $2^{10} = 1\,024$ auftritt.

Danach hat er die einzelnen Ziffern von Zahlen 2^n aus seinen Aufzeichnungen (und, soweit er sie sich gemerkt hatte, auch aus seinem Gedächtnis) verloren. Nur die Feststellung (*) ist ihm noch bekannt. Nun wird folgende Frage gestellt:

(**) Gibt es unter den Zahlen 2^n ($n \in \{11, 12, \ldots, 108, 109\}$) zwei, die in der Zifferngruppe der letzten drei Ziffern miteinander übereinstimmen?

Beweisen Sie, daß die Frage (**) mit "Nein" zu beantworten ist, wenn man die Feststellung (*) zur Verfügung hat, jedoch ohne daß man zur Begründung doch noch die Zifferngruppe der letzten drei Ziffern aller einzelnen Zahlen 2^n ($n \in \{11, 12, \ldots, 108, 109\}$) wieder berechnen müßte!

Aufgabe 321045:



In der Abbildung wird ein Stadtteil skizziert; die Linien stellen die Straßen dar. Robert wählt für seinen Weg von der Schule S nach Hause H an jedem Schultag einen der möglichst kurzen Wege. Kommt er an die Ecke E, so kauft er sich ein Eis.

Auf die Bitte, dies möge nicht zu oft vorkommen, vereinbart er, an jeder (für möglichst kurze Wege) möglichen Abzweigung *durch Zufall* zu entscheiden, welche der zwei zu wählenden Richtungen er einschlägt, das heißt so, daß jede dieser zwei Richtungen, unabhängig von der vorher getroffenen Entscheidung, *im Durchschnitt gleich oft* vorkommt.

Nach so langer Zeit, daß derartige Zufallsaussagen sinnvoll sind, stellt sich heraus: Robert hat im Durchschnitt an einem Drittel aller Schultage ein Eis gekauft.

a) Er erklärt dazu: "Mehr als ein Drittel aller möglichst kurzen Wege von S nach H führen über die Ecke E."

   Trifft das zu?

b) Seine Mutter meint: "Dennoch müßte - bei Zufallsentscheidungen im vereinbarten Sinn - durchschnittlich an weniger als einem Drittel aller Schultage der Weg über E führen."

   Trifft das zu?

Aufgabe 321046:

Man beweise:

Sind a, b, c die Seitenlängen und ist F der Flächeninhalt eines Dreiecks, so hat die Summe der Längen der drei Lote, die von je einer Seitenmitte aus auf die in der Gegenecke an den Umkreis gelegte Tangente gefällt werden, den Wert

$$2F \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$$