32. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 12
Saison 1992/1993

Aufgaben

32. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 321221:

Man ermittle zu jeder ganzen Zahl k alle diejenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen, die das Gleichungssystem aus den beiden folgenden Gleichungen (1), (2) erfüllen:

$$x^2 + k \cdot y^2 = 4, \tag{1}$$
$$k \cdot x^2 - y^2 = 2. \tag{2}$$

Aufgabe 321222:

Man beweise, daß für jede positive ganze Zahl n die Ungleichung

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad \text{gilt.}$$

Aufgabe 321223:

Man beweise:

In jedem Dreieck ist für jede seiner Ecken der Abstand des Höhenschnittpunktes zu dieser Ecke doppelt so groß wie der Abstand des Umkreismittelpunktes von derjenigen Seite, die der genannten Ecke gegenüberliegt.

Aufgabe 321224:

Eine Schulklasse ist im Sportunterricht in einer Linie angetreten. Auf das Kommando *rechts um!* drehen sich alle Schüler um 90°, jedoch einige zur falschen Richtung. Jeder Schüler kehrt also jedem seiner Nachbarn entweder das Gesicht oder den Rücken zu.

Von dieser Anfangssituation an drehen sich nur noch zu jeder vollen Sekunde genau diejenigen Schüler, und zwar um 180°, die einem ihrer Nachbarn das Gesicht zuwenden und dabei sein Gesicht sehen.

Man untersuche, ob sich aus jeder (der obigen Beschreibung entsprechenden) Anfangssituation einer Schulklasse heraus einmal ein Zeitpunkt einstellen muß, von dem an sich kein Schüler mehr dreht.