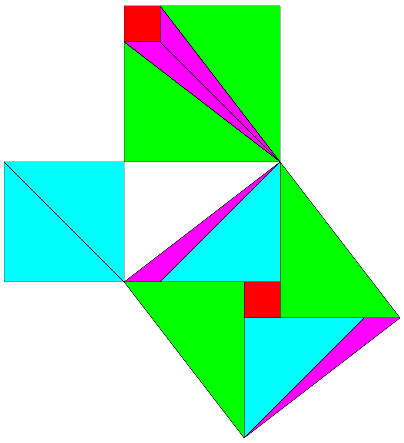
33. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 10
Saison 1993/1994

Aufgaben



33. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Es wird den Schülern der Klassen 9 und 10 empfohlen, aus den folgenden sechs Aufgaben vier zur Bearbeitung auszuwählen.

Aufgabe 331011:

Christa und Jürgen spielen ein Spiel nach folgenden Regeln:

Die Spieler legen abwechselnd je einen Dominostein auf ein streifenförmiges Spielbrett aus 9 Feldern (siehe Skizze). Jeder Dominostein soll genau zwei Felder belegen; kein Feld darf mehrfach belegt werden. Das Spiel ist beendet, sobald ein Spieler nicht mehr legen kann; dieser Spieler hat dann verloren.

Das Spiel macht den beiden bald keinen Spaß mehr. Woran kann das liegen?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Aufgabe 331012:

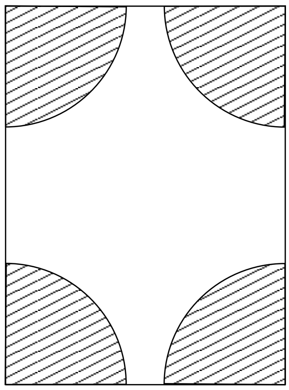
Gibt es eine sechsstellige natürliche Zahl, die genau vierzehn verschiedene natürliche Zahlen als Teiler hat, unter denen sich auch die Zahl 14 befindet?

Aufgabe 331013:

Für welche ganzen, nicht negativen Zahlen t ist $z = \sqrt{t + \sqrt{t}}$ eine rationale Zahl, für welche nicht?

Aufgabe 331014:

Von der Fläche eines Rechtecks mit Seitenlängen a, b sollen die Flächen von vier Viertelkreisen abgeschnitten werden. Diese sollen alle vier den gleichen Radius r haben, mit dem die Voraussetzung erfüllt ist, daß von den Rechtecksseiten noch Teilstrecken übrigbleiben (siehe Abbildung).



a) Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, zu denen es Längen a, b, r der vorausgesetzten Art gibt, so daß genau x Prozent der Rechteckfläche abgeschnitten werden!

b) Ermitteln Sie alle diejenigen Verhältniswerte $k = \frac{b}{a} \geq 1$, für die es möglich ist, einen Radius r der vorausgesetzten Art so zu wählen, daß genau die Hälfte der Rechteckfläche abgeschnitten wird!

Aufgabe 331015:

Bei einer oben offenen Blechdose von der Form eines geraden Kreiszylinders mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h seien A und B die Endpunkte eines Durchmessers der Grundfläche. Dabei liege A außerhalb und B innerhalb der Dose. Die Dicke des Bleches werde vernachlässigt.

Eine Ameise bewegt sich von A nach B

a) nur auf Mantellinien und einem Durchmesser der Grundfläche,

b) auf einem möglichst kurzen Weg, den es unter allen Wegen von A nach B gibt, die die äußere und die innere Mantelfläche nicht verlassen.

Ermitteln Sie einen Wert des Verhältnisses $h : r$, für den die beiden in a) und b) beschriebenen Wege einander gleichlang sind!

Aufgabe 331016:

Bekanntlich gilt $2^{10} = 1\,024$.

Formulieren Sie ein Computerprogramm, mit dessen Hilfe man den kleinsten natürlichen Exponent $p > 10$ ermitteln kann, für den die Zahl $2p$ ebenfalls auf die Ziffern ...024 endet! Begründen Sie, daß das von Ihnen formulierte Programm diese Aufgabe löst!

Hinweis: Es ist zu beachten, daß für die im Rechenweg vorkommenden Zahlen bei weithin üblicher Computernutzung Einschränkungen der Stellenzahl auftreten.