33. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 10
Saison 1993/1994

Aufgaben

33. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 331031:

Beweisen Sie, daß sich der Bruch $\frac{1}{1\,994}$ als Summe von genau 1 994 Stammbrüchen darstellen läßt, von denen keine zwei einander gleich sind!

Hinweis: Ein Bruch heißt genau dann ein Stammbruch, wenn sein Zähler 1 lautet und sein Nenner eine natürliche Zahl ist.

Aufgabe 331032:

Für jede positive ganze Zahl n denke man sich nach folgender Vorschrift eine weitere Zahl n' gebildet:

Aus der Zifferndarstellung von n im Dezimalsystem wird die erste Ziffer weggenommen und statt dessen hinter die letzte Ziffer angefügt. Dann sei n' die Zahl mit der entstandenen Zifferndarstellung. (Bei dieser Zifferndarstellung von n' wird auch die Möglichkeit einer Anfangsziffer Null zugelassen, wenn nämlich die zweite Ziffer von n eine Null war.)

Untersuchen Sie, ob es durch 7 teilbare Zahlen n gibt, für die $n' = n : 7$ gilt! Ermitteln Sie, wenn es solche Zahlen gibt, die kleinste unter ihnen!

Aufgabe 331033:

Antje hat in einem älteren Geometriebuch folgende Näherungskonstruktion für regelmäßige Vielecke mit gegebener Seitenlänge s gefunden:

Man konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge s. Dann konstruiere man den Mittelpunkt D von AB und verlängere die Strecke DC über C hinaus. Auf dieser Verlängerung trage man fortgesetzt Strecken der Länge $\frac{s}{6}$ ab. Die dabei der Reihe nach erhaltenen Punkte seien mit M_7, M_8, M_9, ... bezeichnet. Für $n > 6$ ist dann jeweils der durch A und B gehende Kreis um M_n näherungsweise der Umkreis eines regelmäßigen n-Ecks der Seitenlänge s_n.

Beate behauptet, speziell für $n = 12$ gelte das nicht nur näherungsweise, sondern sogar genau.

Beweisen Sie diese Behauptung!

Aufgabe 331034:

$$\begin{array}{ccccc}
 & E & I & N & S \\
+ & E & I & N & S \\
+ & E & I & N & S \\
+ & E & I & N & S \\
+ & E & I & N & S \\
\hline
= & F & \text{Ü} & N & F
\end{array}$$

Das nebenstehende *Kryptogramm* stellt die Aufgabe, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzten, daß eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Dabei soll auch die Regel beachtet werden, daß als Anfangsziffer (für E und F) nicht die Ziffer Null auftreten darf. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

Untersuchen Sie, ob eine Lösung existiert! Wenn das der Fall ist, untersuchen Sie, ob verschiedene Lösungen existieren und geben Sie jede Lösung an!

Hinweis: Zwei Lösungen heißen genau dann voneinander verschieden, wenn nicht jeder Buchstabe in der einen dieser Lösungen durch dieselbe Ziffer ersetzt wird wie in der anderen dieser Lösungen.

Aufgabe 331035:

Man ermittle alle diejenigen Paare $(m;n)$ positiver ganzer Zahlen m und n, für die $\frac{m^2}{m+1} + \frac{n^2}{n+1}$ eine ganze Zahl ist.

Aufgabe 331036:

Es sei K ein gerader Kreiskegel. Die Grundfläche von K habe den Mittelpunkt M und den Radius r, die Spitze von K sei S, die Höhe $h = \overline{MS}$ von K betrage $h = r \cdot \sqrt{3}$. Auf dem Rand der Grundfläche seien zwei Punkte A, B so gelegen, daß der Winkel $\sphericalangle AMB$ die Größe $120°$ hat.

Eine Ameise, die sich im Punkt A befindet, will zu einem Punkt C der Mantellinie BS gelangen und diesen Zielpunkt C so wählen, daß sie, ohne die Mantelfläche zu verlassen, einen möglichst kurzen Weg zurückzulegen hat.

Ermitteln Sie die Länge eines solchen Weges, ausgedrückt in Abhängigkeit von r!