



34. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 6
Saison 1994/1995

Aufgaben





34. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 340631:

Jedes konvexe Vieleck läßt sich in Dreiecke zerlegen, deren Eckpunkte zugleich Eckpunkte des Vielecks sind. Bei einem Viereck beispielsweise findet man dafür genau 2 Möglichkeiten (siehe Abbildung a).

Skizziere für ein selbstgewähltes

- a) konvexes Fünfeck
- b) konvexes Sechseck

alle Zerlegungen dieser Art!

Hinweis: Ein Vieleck wird genau dann *konvex* genannt, wenn alle seine Diagonalen ganz der Fläche des Vielecks angehören. Ein Beispiel für ein Vieleck, das nicht konvex ist, zeigt Abbildung b.

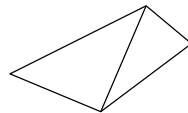
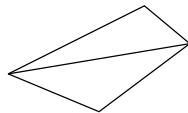


Abbildung a

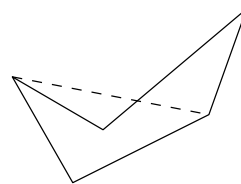


Abbildung b

Aufgabe 340632:

Man kann die Buchstaben eines Wortes in eine andere Reihenfolge bringen. Jede so entstandene Aneinanderreihung von Buchstaben soll ebenfalls ein "Wort" genannt werden, auch wenn sie (in der deutschen Sprache) keinen Sinn ergibt. Wichtig ist nur, daß jeder Buchstabe genau so oft vorkommt wie im ursprünglichen Wort. Zum Beispiel lassen sich aus dem Wort *TAL* insgesamt folgende Wörter bilden:

ALT, ATL, LAT, LTA, TAL, TLA.

Sie sind hier alphabetisch geordnet (zum Beispiel steht *ATL* vor *LAT*, weil der erste Buchstabe *A* von *ATL* im Alphabet früher vorkommt als der erste Buchstabe *L* von *LTA*; über die Reihenfolge von *LAT* und *LTA* mit gleichem ersten Buchstaben entscheidet der zweite Buchstabe u.s.w.).

Wie man sieht, steht bei dieser Anordnung das Wort *TAL* an der 5. Stelle der Aufzählung.

- (a) Gib alle Wörter an, die sich ebenso aus dem Wort *LAND* bilden lassen (das Wort *LAND* ist dabei mit aufzuzählen)!
- (b) Wenn die Wörter in (a) alphabetisch geordnet werden, an welcher Stelle steht dann das Wort *LAND*?



- (c) Wie viele Wörter lassen sich aus dem Wort *UMLAND* bilden? (Wieder ist *UMLAND* mitzuzählen.)
- (d) An wievielter Stelle steht bei alphabetischer Ordnung der Wörter aus (c) das Wort *UMLAND*?

Aufgabe 340633:

Schon vor 5000 Jahren gab es in Ägypten eine weit entwickelte Kenntnis der Bruchrechnung. Dabei wurden *Stammbrüche* bevorzugt; das sind Brüche, deren Zähler 1 lautet und deren Nenner eine natürliche Zahl ist.

- (a) Gib je eine Möglichkeit an, wie man die Brüche $\frac{2}{7}$ und $\frac{3}{13}$ als Summe von mindestens zwei unterschiedlichen Stammbrüchen darstellen kann!

Die Anzahl der Summanden ist nicht vorgeschrieben; eine Begründung wird nicht verlangt.

- (b) Stelle den Bruch $\frac{1}{36}$ derart als Summe von mindestens zwei Stammbrüchen dar, daß einer der Summanden so groß wie möglich ist! Erkläre, warum kein größerer Summand möglich ist!
- (c) Löse dieselbe Aufgabe für $\frac{1}{n}$ statt $\frac{1}{36}$, wo n eine beliebige natürliche Zahl größer als 1 ist!

Aufgabe 340634:

Vera erzählt ihrer Freundin Ute, sie habe die Kantenlänge eines Quaders gemessen und dabei folgendes bemerkt:

- (1) Eine der Kanten ist doppelt so lang wie eine andere der Kanten.
- (2) Die Summe der Längen aller zwölf Kanten des Quaders beträgt 320 cm.
- (3) Genau zwei der sechs Seitenflächen des Quaders sind Quadrate.

Ute meint, durch diese Angaben sei eindeutig bestimmt, welche Kantenlängen bei diesem Quader auftreten. Untersuche, ob Utes Meinung wahr ist! Wenn sie wahr ist, gib die Kantenlängen an; wenn sie nicht wahr ist, gib alle Möglichkeiten an, die es für die Kantenlängen eines Quaders gibt, auf den Veras Angaben zutreffen!

Hinweis: Bei der Angabe der Kantenlängen eines Quaders brauchst du natürlich nicht zwölf Kantenlängen anzugeben, sondern es genügen die Längen etwa der drei Kanten, die an der Ecke des Quaders zusammentreffen.

Aufgabe 340635:

In das Schema der Abbildung a kann man anstelle der Buchstaben Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 so eintragen, daß die vier "Seitensummen" einander gleich sind:

$$a + b + c = c + d + e = e + f + g = g + h + a.$$

Ein Beispiel, hier mit dem Wert 14 der vier "Seitensummen", zeigt die Abbildung b.

- (a) Gib drei solcher Eintragungen an, eine mit dem Wert 2 der vier "Seitensummen", eine mit dem Wert 13 der vier "Seitensummen" und eine mit dem Wert 17 der vier "Seitensummen"!
- (b) Auch mit dem Wert 18 der vier "Seitensummen" ist eine solche Eintragung möglich; dagegen nicht, wenn das Schema so mit Steinen des Dominospiels gebildet werden soll, wie die Abbildung c zeigt.

Zeige, daß das stimmt; erkläre den Unterschied!

(Du erinnerst dich vielleicht an eine Aufgabe aus der 2. Runde der Mathematik-Olympiade dieses Schuljahres. Es ist zugelassen - freilich nicht verlangt, - Teile der Lösung jener Aufgabe als bekannten Sachverhalt anzuführen.)

- (c) Fritz Schlaumeier schaut das ausgefüllte Schema für die "Seitensumme" 14 an, überlegt eine ganze Weile und meint dann: "Die vier Zahlen für b , d , f und h stehen in einer ganz besonderen Beziehung zueinander. Diese Beziehung gilt auch für jede Ausfüllung mit einer anderen 'Seitensumme'."

Gib eine solche Beziehung an und weise nach, daß Fritz recht hat!



a	b	c
h		d
g	f	e

Abb. a

4	4	6
5		5
5	6	3

Abb. b

Abb. c

Aufgabe 340636:

Vater, Mutter, Tochter und Sohn in einer Familie stellen fest:

- (1) Das Produkt aus Tag- und Monatszahl des Geburtstages beträgt beim Vater 242, bei der Mutter 200 und bei der Tochter 6.
(Beispiel für eine solche Produktbildung: Ein Geburtstag am 30. Juli ergibt $30 \cdot 7 = 210$.)
- (2) Die Summe aus Tag- und Monatszahl des Geburtstages ergibt bei jedem der vier Familienmitglieder die - in ganzen Zahlen gerechnete - Altersangabe in Jahren.
- (3) Die Summe dieser vier Altersangaben beträgt 80.
- (4) Das Produkt dieser vier Altersangaben beträgt 59 400.
- (a) Wie alt sind die Familienmitglieder? Wann haben Vater, Mutter und Tochter Geburtstag?

Gewinne die Antworten auf diese Fragen ausgehend von den Feststellungen (1), (2), (3), (4)! Untersuche dabei auch, ob es für einige der erfragten Angaben mehrere Möglichkeiten gibt!

- (b) Zeige, daß man die Aufgabe (a) auch noch - mit demselben Ergebnis - lösen kann, wenn man eine der Feststellungen (1), (2), (3), (4) wegläßt!