34. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Saison 1994/1995

Aufgaben

34. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 340731 = 340941:

Albrecht soll eine natürliche Zahl zwischen 1 und 1 000 000 ermitteln. Dirk, Evelyn und Franziska machen dazu jeweils genau eine wahre und eine falsche Aussage (in welcher Reihenfolge, wird nicht dazu gesagt):

Dirk:

(1) Die gesuchte Zahl hat weniger als drei Dezimalstellen.

(2) Zerlegt man die gesuchte Zahl in Primfaktoren, so kommen in dieser Zerlegung genau zwei voneinander verschiedene Primzahlen vor, jede (mindestens einmal, aber) möglicherweise auch mehrmals.

Evelyn:

(1) Die gesuchte Zahl ist durch 9 teilbar.

(2) Die gesuchte Zahl ist nicht durch 27 teilbar.

Franziska:

(1) Die gesuchte Zahl lautet 91 809.

(2) Die gesuchte Zahl ist durch 101 teilbar.

Zeige, daß die gesuchte Zahl auf diese Weise eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Zahl!

Aufgabe 340732:

Man denke sich die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... usw. bis 100 derart hintereinander aufgeschrieben, daß eine Zahl z der Form $z = 12345678910111213....9899100$ entsteht.

a) Wieviel Stellen hat z?

b) Es sollen 100 Ziffern der Zahl z so gestrichen werden, daß die mit den restlichen Ziffern dargestellt Zahl z' möglichst groß ist. Dabei soll die Reihenfolge der in z' verbleibenden Ziffern von z nicht geändert werden.

Ermittle, welche Ziffern zu streichen sind, und gib die ersten 10 Ziffern der neuen Zahl z' an!

Aufgabe 340733:

Ist ABC ein Dreieck, das nicht stumpfwinklig ist, so bezeichne D den Fußpunkt der auf AB senkrechten Höhe; E sei der Bildpunkt von D bei der Spiegelung an AC, und F sei der Bildpunkt von D bei der Spiegelung an BC.

a) Wie groß ist der Flächeninhalt und der Umfang des Fünfecks $ABFCE$, wenn $\overline{AB} = 7$ cm und $\overline{CD} = 4$ cm vorausgesetzt wird.

b) Wie groß ist der Winkel $\sphericalangle ACB$, wenn -anders als in a)- vorausgesetzt wird, daß es eine Gerade gibt, auf der die drei Punkte E, C und F liegen?

Beweise auch, daß aus dieser Voraussetzung folgt, daß das Viereck $ABFE$ ein Trapez ist!

Aufgabe 340734:

Ein Viereck heißt genau dann *konvex*, wenn alle seine Diagonalen ganz der Fläche des Vielecks angehören.

Wie viele Diagonalen hat ein konvexes 1995-Eck insgesamt? Begründe die von dir angegebene Anzahl!

Aufgabe 340735:

In einer Arbeitsgemeinschaft sprechen Alexandra und Daniel über Eigenschaften von Würfeln.

Alexandra sagt: "Für je drei Seitenflächen eines Würfels, die eine gemeinsame Ecke haben, gilt: Die Mittelpunkte dieser drei Seitenflächen sind die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks."

Daniel sagt: "Für je drei Seitenflächen eines Würfels, die keine gemeinsame Ecke haben, gilt: Die Mittelpunkte dieser drei Seitenflächen sind die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks."

Beweise, daß beide Aussagen wahr sind!

Aufgabe 340736:

Jemand konstruiert ein Quadrat $ABCD$ mit der Diagonalenlänge $\overline{AC} = 10\,\text{cm}$. Dann wählt er auf der Seite AB einen beliebigen Punkt E und konstruiert den Schnittpunkt F von BC mit der Parallelen durch E zu AC, den Schnittpunkt G von CD mit der Parallelen durch F zu BD sowie den Schnittpunkt H von AD mit der Parallelen durch G zu AC.

a) Beweise, daß jedes so zu konstruierende Viereck $EFGH$ ein Rechteck ist!

b) Ermittle für jedes so zu konstruierende Viereck den Umfang!