34. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 8
Saison 1994/1995

Aufgaben

34. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 340821:

Eine vierstellige natürliche Zahl heiße genau dann "symmetrisch", wenn ihre Tausenderziffer gleich ihrer Einerziffer und ihre Hunderterziffer gleich ihrer Zehnerziffer ist. Tanja behauptet, daß jede vierstellige symmetrische Zahl durch 11 teilbar ist.

a) Überprüfe diese Teilbarkeit an drei selbstgewählten Beispielen!

b) Beweise allgemein Tanjas Behauptung!

c) Wie viele vierstellige symmetrische Zahlen gibt es insgesamt?

d) Wie viele geradzahlige vierstellige symmetrische Zahlen gibt es insgesamt?

Aufgabe 340822:

Aus den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sollen zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ so gebildet werden, daß jede Ziffer in den Zifferndarstellungen der vier natürlichen Zahlen a, b, c, d insgesamt genau einmal verwendet wird. Für die so gebildeten Brüche soll $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$ gelten. In dem ersten der beiden Brüche soll $a = 13$ und $b = 26$ gewählt werden.

Beweise, daß es genau eine Möglichkeit gibt, den Zähler c und den Nenner d des zweiten Bruches so zu wählen, daß alle genannten Bedingungen erfüllt sind! Gib diesen zweiten Bruch an!

Aufgabe 340823:

a) Wie oft insgesamt stehen im Verlaufe von 24 Stunden (von 0.00 Uhr bis 24.00 Uhr) der Stunden- und Minutenzeiger einer Uhr senkrecht aufeinander?

b) Berechne insbesondere alle derartigen Zeitpunkte zwischen 4.00 Uhr und 5.00 Uhr! Gib diese Zeitpunkte so an, wie sie eine Digitaluhr anzeigen würde, von der wir voraussetzen, daß sie korrekt geht, d.h. zu Beginn jeder Sekunde die richtige Stunden-, Minuten- und Sekundenanzeige bringt!

Aufgabe 340824:

Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$. Auf der Seite AD sei Q derjenige Punkt, für den $\overline{AQ} = 4\,\text{cm}$ gilt. Für jeden Punkt P, der auf der Strecke QC liegt, bezeichne L den Fußpunkt des von P auf BC gefällten Lotes; ferner bezeichnen F_1, F_2 bzw. F_3 in dieser Reihenfolge den Flächeninhalt des Dreiecks APQ, des Dreiecks ABP bzw. des Dreiecks BCP.

a) Ermittle die Länge der Strecke PL und den Flächeninhalt F_1, wenn vorausgesetzt wird, daß P so auf QC gewählt wurde, daß $F_3 = 7,5\,\text{cm}^2$ gilt!

b) Ermittle die Länge der Strecke PL und den Flächeninhalt F_2, wenn vorausgesetzt wird, daß P so auf QC gewählt wurde, daß $F_1 = F_3$ gilt!

c) Beschreibe und begründe, wie man P so auf QC konstruieren kann, daß $F_2 = F_3$ gilt!