34. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 9
Saison 1994/1995

Aufgaben

34. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 340931:

Jürgen wählt auf einem Zeichenblatt drei Punkte A, B, C so aus, daß es keine Gerade gibt, auf der alle drei Punkte liegen, und daß die Strecke AB eine andere Länge hat als die Strecke BC. Dann versucht er, einen Punkt X zu konstruieren, der weder auf der durch A und B gelegten Geraden g noch auf der durch B und C gelegten Geraden h liegt und der außerdem die beiden folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt:

(1) Der Punkt X hat von g den gleichen Abstand wie von h.

(2) Die Strecken AB und BC erscheinen von X aus unter gleichgroßen Winkeln; d.h. der Winkel $\sphericalangle AXB$ ist ebenso groß wie der Winkel $\sphericalangle BXC$.

Christa behauptet: Es gibt keinen solchen Punkt X; gleichgültig welche Wahl von A, B, C (mit den eingangs genannten Lagebedingungen) Jürgen getroffen hat.

Hat Christa recht?

Aufgabe 340932 = 341031:

Beweisen Sie, daß es keine natürliche Zahl n gibt, für die die Zifferndarstellung der Zahl $9^n + 1$ auf mehr als eine Null enden würde!

Aufgabe 340933 = 341032:

Berechnen Sie die Zahl

$$123456785 \cdot 123456787 \cdot 123456788 \cdot 123456796 - 123456782 \cdot 123456790 \cdot 123456791 \cdot 123456793$$

ohne die Zahlenwerte der beiden Produkte einzeln zu berechnen!

Aufgabe 340934 = 341034:

Ein Quadrat $ABCD$ sei in 25 kongruente Teilquadrate aufgeteilt. Ist n eine positive ganze Zahl mit $n \leq 25$, so seien n verschiedene Farben gewählt, und von jeder dieser Farben seien 25 Blättchen von der Größe der Teilquadrate zur Verfügung gestellt. Von diesen $n \cdot 25$ Blättchen sollen dann 25 ausgewählt und so auf das Quadrat $ABCD$ gelegt werden, daß jedes Teilquadrat von genau einem der ausgewählten Blättchen bedeckt wird.

Eine Zahl n werde genau dann eine "freundliche" Zahl genannt, wenn für sie folgendes gilt:

Bei *jeder* Auswahl von 25 der $n \cdot 25$ Blättchen, bei der jede der n Farben mit mindestens einem Blättchen vertreten ist, kann man die Verteilung auf die Teilquadrate so vornehmen, daß das bedeckte Quadrat $ABCD$ als farbiges Muster symmetrisch bezüglich der Geraden durch A und C ist.

Ermitteln Sie unter den positiven ganzen Zahlen $n \leq 25$ alle "freundlichen" Zahlen!

Aufgabe 340935:

Man ermittle alle diejenigen positiven ganzen Zahlen n, für die jede der sechs Zahlen

$$n, \quad n+2, \quad n+6, \quad n+8, \quad n+12, \quad n+14$$

eine Primzahl ist.

Aufgabe 340936:

Es sei $ABCD$ ein (nicht notwendig regelmäßiges) Tetraeder, bei dem die vier Tetraederflächen ABC, ABD, ACD und BCD alle einander kongruent sind. Ferner sei h die Länge der auf einer der vier Tetraederflächen senkrechten Höhe, und P sei ein Punkt im Innern des Tetraeders $ABCD$.

Man beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets die folgende Aussage gilt:

Die Summe der Abstände von P zu den vier Tetraederflächen beträgt h.

Hinweis: Der *Abstand* eines Punktes zu einer begrenzten ebenen Fläche werde definiert als die Länge des Lotes von diesem Punkt auf die ebene, in der die Fläche liegt. Das gelte auch dann, wenn der Fußpunkt des Lotes (zwar in der Ebene, aber) außerhalb der Begrenzung der ebenen Fläche liegt. In diesem Sinne wird auch die auf einer Tetraederfläche senkrechte *Höhe* stets als Lot von der Gegenecke auf die Ebene verstanden, in der die Tetraederfläche liegt.