34. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 10
Saison 1994/1995

Aufgaben

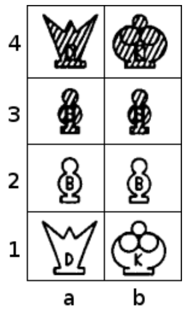
34. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Es wird den Schülern der Klassen 9 und 10 empfohlen, aus den folgenden sechs Aufgaben vier zur Bearbeitung auszuwählen.

Aufgabe 341011:

Frank und Felix denken sich das *kleinste Schach der Welt* aus:



- Das Spielfeld hat 2×4 Felder.
- Weiß spielt mit den Figuren König, Dame und zwei Bauern; Schwarz ebenso.
- Zu Anfang werden die Figuren wie in der Abbildung aufgestellt.
- Dann wird nach den Regeln des üblichen Schachspiels verfahren, sofern der Platz für ihre Anwendung ausreicht. (Erkundigen Sie sich nötigenfalls nach den Regeln!)

Frank stellt drei Behauptungen auf: Es sei möglich, so zu spielen, daß

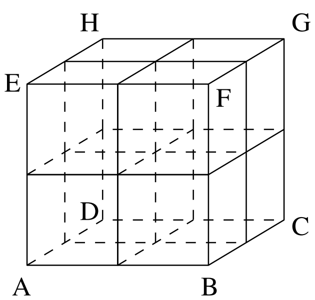
a) das Spiel unentschieden endet,

b) Weiß gewinnt,

c) Schwarz gewinnt.

Beweisen Sie, daß die drei Behauptungen zutreffen.

Aufgabe 341012:



Die Abbildung zeigt ein aus Strecken zusammengesetztes Gitter. Diese Strecken sind - nach Zerlegung eines Würfels $ABCDEFGH$ in acht einander gleichgroße Teilwürfel - die Kanten dieser Teilwürfel.

Eine Ameise, die sich nur auf diesen Strecken bewegen kann, soll auf einem möglichst kurzen Weg von A nach G gelangen.

Wieviele verschieden Wege gibt es hierfür insgesamt,

a) wenn alle Strecken des Gitters zugelassen sind.

b) wenn nur solche Strecken des Gitters zugelassen sind, die der Oberfläche des Würfels $ABCDEFGH$ angehören?

Aufgabe 341013:

Karin und Rolf sammeln Straßenbahnfahrscheine. Jeder Fahrschein hat eine Nummer aus 6 Ziffern. Ist darin die Summe der ersten drei Ziffern gleich der Summe der letzten drei Ziffern, so heißt der Schein ein *Glücksschein*.

Um die Chance hierfür abzuschätzen, wollen Karin und Rolf wissen, wieviel Prozent aller Fahrscheine *Glücksscheine* sind. Dabei wird vorausgesetzt, daß jede Nummer von 000 000 bis 999 999 gleich oft vorkommt.

Karin schreibt ein einfaches Computerprogramm, mit dem die gesuchte Prozentzahl dadurch ermittelt wird, daß eine Anweisungsfolge 1 000 000 mal abläuft. Da das lange dauert, schreibt Rolf ein Programm, in dem eine (andere) Anweisungsfolge nur 1 000 mal ablaufen muß (und sonst nur wenige weitere Anweisungen zu durchlaufen sind).

Schreiben Sie je ein solches Programm und erläutern Sie, warum damit die gesuchte Prozentzahl gefunden wird! (Die Wahl der Programmiersprache ist natürlich freigestellt.)

Aufgabe 341014:

Arne zeichnet ein Dreieck ABC und einen Kreis k_1, der so gewählt ist, daß er durch B geht, die Strecke AB in einem von B verschiedenen Punkt X schneidet und daß er die Strecke BC in einem von B verschiedenen Punkt Y schneidet. Dann konstruiert Arne den Umkreis k_2 des Dreiecks ACX und den Umkreis k_3 des Dreiecks ACY.

Nun stellt er fest, daß in seiner Zeichnung die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 der Kreise k_1, k_2, k_3 auf einer gemeinsamen Geraden liegen; das findet er erstaunlich.

Britta meint: Zu jedem Dreieck ABC gibt es für den Kreis k_1 unendlich viele Möglichkeiten, bei denen jeweils die drei genannten Mittelpunkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen, und es gibt für k_1 auch unendlich viele Möglichkeiten, bei denen das nicht zutrifft.

Hat Britta recht?

Aufgabe 341015:

Geben Sie eine Gleichung in einer Unbekannten x so an, daß beide Seiten der Gleichung für alle reellen Zahlen x definiert sind, daß die Gleichung unendlich viele reelle Zahlen als Lösung hat, von denen aber keine ganzzahlig ist!

Zeigen Sie, daß die von Ihnen angegebene Gleichung diesen Bedingungen genügt!

Aufgabe 341016:

Es seien Funktionen f_0, f_1, f_2, f_3, ... für alle reellen Zahlen x definiert durch

$$\begin{aligned} f_0(x) &= |x|, \\ f_1(x) &= ||x|-2|\,, \\ f_2(x) &= |||x|-2|-2|\,, \\ &\dots \end{aligned}$$

allgemein: $f_k(x) = |f_{k-1}(x) - 2|$ für alle ganzen Zahlen $k \geq 1$.

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f_0, f_1 und f_2! Beschreiben Sie allgemein das Aussehen des Graphen der Funktion f_k!