34. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 10
Saison 1994/1995

Aufgaben

34. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 341021:

a) Wie viele verschiedene Verteilungen der Zahlen 1, 2, ..., 6 auf die sechs Seitenflächen eines Würfels gibt es insgesamt?

b) Wie viele verschiedene unter diesen Verteilungen gibt es insgesamt, bei denen die zusätzliche Bedingung erfüllt ist, daß für jedes Paar einander gegenüberliegender Seitenflächen die Zahlen auf diesen beiden Flächen die Summe 7 haben?

Hinweis: In a) und b) gelten zwei Verteilungen genau dann als voneinander verschieden, wenn sie durch keine Drehung des Würfels ineinander überführt werden können.

Aufgabe 341022:

Anja und Bernd sprechen darüber, wie man *die an den Kreis k*, dessen Mittelpunkt M sei, *in einen seiner Punkte P gelegte Tangente t* vollständig ausreichend beschreiben kann.

Anja ist für folgende Beschreibung: t ist diejenige durch P gehende Gerade, die *auf MP senkrecht steht* **und** *mit k nur den Punkt P gemeinsam hat.*

Bernd meint: Man kann jeweils eine der beiden Bedingungen weglassen, da jede dieser Bedingungen aus der anderen folgt, d.h. da für jeden Kreis k um M und für jeden Punkt P auf k die beiden nachstehenden Sätze (1) und (2) gelten:

(1) Wenn eine durch P gehende Gerade t auf MP senkrecht steht, dann hat sie mit k nur den Punkt P gemeinsam.

(2) Wenn eine durch P gehende Gerade t nur den Punkt P mit k gemeinsam hat, dann steht sie auf MP senkrecht.

Beweisen Sie beide Sätze (1) und (2)!

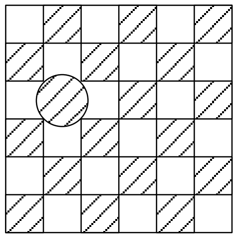
Aufgabe 341023:

Jens-Uwe hat einige natürliche Zahlen quadriert, deren Zifferndarstellung (im dekadischen Positionssystem) nur aus Neunen besteht. Er äußert zu seinem Freund anhand der Ergebnisse von 9^2, 99^2, 999^2 die Vermutung, daß in solchen Ergebnissen niemals mehr als vier verschiedene Ziffern auftreten.

Dieser meint nach einigem Überlegen, er könne sogar für jedes einzelne Quadrat einer nur aus Neunen bestehenden Zahl (ohne solche Quadrate noch einzeln auszurechnen) die Fragen genau beantworten, *welche Ziffern* darin vorkommen und *an welchen Stellen* sie dort stehen.

Beantworten Sie diese Fragen und beweisen Sie ihre Antwort!

Aufgabe 341024:



Für jede positive ganze Zahl n denke man sich ein Schachbrett von $2n \times 2n$ Feldern. Beispielsweise zeigt die Abbildung ein solches Schachbrett für $n = 3$. Um jedes schwarze Feld denke man sich den Umkreis konstruiert. (Die Abbildung zeigt einen solchen Umkreis.)

a) Beweisen Sie, daß für jedes positive ganzzahlige n die folgende Aussage gilt: Der Flächeninhalt des Schachbrettes, der von keinem der Kreise überdeckt wird, beträgt mehr als 20%.

b) Ermitteln Sie die kleinste positive ganze Zahl n, für die der Flächenanteil des Schachbrettes, der von keinem der Kreise überdeckt wird, weniger als 25% beträgt!