34. Mathematik Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 10
Saison 1994/1995

Aufgaben

34. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 341041:

Zeigen Sie, daß die Zahl $z = 7 + 7^3 + 7^5 + 7^7 + ... + 7^{93} + 7^{95}$ durch 336 teilbar ist!

Aufgabe 341042 = 340943:

Auf der Seite AB des Quadrates $ABCD$ werde ein Punkt $X \neq A$ gewählt. Dann werde das Quadrat durch die Strecken AC und XD in vier Teilflächen zerlegt.

Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, die Wahl von X so zu treffen, daß es natürliche Zahlen p, q und r gibt, für die die Flächeninhalte dieser Teilflächen in geeigneter Reihenfolge im Verhältnis $1 : p : q : r$ stehen!

Aufgabe 341043:

Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl n mit $n \geq 2$ und jede natürliche Zahl k mit $k \geq 1$ die Zahl

$$z = (1 + k + k^2 + ... + k^n)^2 - k^n$$

keine Primzahl ist.

Aufgabe 341044:

Zu jeder gegebenen reellen Zahl c sind zwei in einem Intervall $[a, b]$ definierte Funktionen f und g gesucht, die den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:

(1) Für jedes x in dem Intervall $[a, b]$ gilt $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

(2) Die Funktion f ist nicht konstant.

(3) Der Graph von g geht aus dem Graph von f durch Verschiebung um den Wert c in Richtung der y-Achse hervor.

Geben Sie (passend zu c) Zahlen a, b und im Intervall $[a, b]$ definierte Funktion f, g an, und weisen Sie nach, daß bei Ihren Angaben die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt sind!

Aufgabe 341045 = 340945:

Einem regelmäßigen Tetraeder $ABCD$ wird die Inkugel K einbeschrieben (das ist diejenige Kugel, die alle vier Dreiecksflächen ABC, ABD, ACD, BCD berührt). Dieser Kugel wird ein zweiter regelmäßiger Tetraeder $PQRS$ einbeschrieben (d.h., seine Ecken P, Q, R, S liegen alle auf der Oberfläche der Kugel K).

Welches Verhältnis $V_2 : V_1$ bildet das Volumen V_2 eines solchen Tetraeders $PQRS$ mit dem Volumen V_1 von $ABCD$?

Aufgabe 341046:

In einem Kreis k seien vier Sehnen AB, BC, CD, DE von gleicher Länge $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE}$ gezeichnet. Dabei sei diese Länge so gewählt, daß der von A über B, C, D zu E führende Bogen kleiner als der gesamte Kreisumfang ist. Der Schnittpunkt der Strecken AC und BD sei S; der Schnittpunkt der Strecken AD und BE sei T.

Beweisen Sie, daß aus dieser Voraussetzung stets $\overline{AB}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{ST}$ folgt!