34. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 12
Saison 1994/1995

Aufgaben

34. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 341221:

Man beweise, daß für alle nichtnegativen reellen Zahlen x und y die Ungleichungen

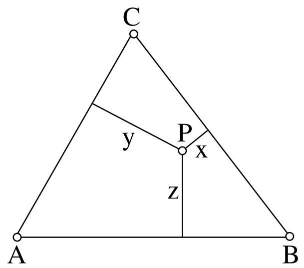
$$0 \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} - \frac{x+y}{2} \leq \frac{|x-y|}{2} \quad \text{gelten}$$

Aufgabe 341222:

Man beweise für jeden Punkt P, der im Inneren eines gleichseitigen Dreiecks ABC mit dem Flächeninhalt $F = 1$ liegt:

Die Längen x, y, z der Lote von P auf die Dreiecksseiten (siehe Abbildung) erfüllen die Gleichung

$$x + y + z = \sqrt[4]{3}.$$



Aufgabe 341223:

Man beweise die folgende Aussage:

Wenn die Längen der Seitenkanten eines Tetraeders $ABCD$ die Gleichungen

$$\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD} = 1 \qquad \text{und} \qquad \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$$

erfüllen, so ist die Oberfläche des Tetraeders kleiner als $\frac{3}{2} \cdot \sqrt{3}$.

Aufgabe 341224:

Ist z eine 1 995-ziffrige natürliche Zahl und ist n eine natürliche Zahl mit $1 \leq n \leq 1\,994$, so bezeichne $z^{[n]}$ diejenige Zahl, deren Zifferndarstellung entsteht, indem man aus der Zifferndarstellung von z die ersten n Ziffern wegläßt und in gleicher Reihenfolge wieder an das Ende der Zifferndarstellung anfügt.

Mit diesen Bezeichnungen beweise man für jedes 1 995-ziffrige z und jedes n mit $1 \leq n \leq 1\,994$:

Ist z durch 27 teilbar, so ist auch $z^{[n]}$ durch 27 teilbar.