1. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Saison 1961/1962

Aufgaben und Lösungen

1. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 011011:
Von einem gleichschenkligen Dreieck sind gegeben:

$$AB = c = 87{,}51\text{ m}, \qquad \sphericalangle CAB = \alpha = 93{,}42°.$$

Berechnen Sie die restlichen Winkel und Seiten!

Aufgabe 011012:
In der UdSSR wird heute in 37 Minuten genausoviel Gas erzeugt wie im zaristischen Rußland während des gesamten Jahres 1913.

Berechnen Sie die Steigerung in Prozent!

Aufgabe 011013:
Ein Zug fährt mit geringer Geschwindigkeit über eine 171 m lange Brücke in 27 s (gerechnet vom Auffahren der Lokomotive auf die Brücke bis zum Verschwinden des letzten Wagens von der Brücke). An einem Fußgänger, der dem Zug mit einer Geschwindigkeit von $1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ entgegengeht, fährt der Zug in 9 s vorüber.

a) Welche Geschwindigkeit hat der Zug (in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$)?

b) Wie lang ist der Zug?

Aufgabe 011014:
Aus einem würfelförmigen Stück Material (Kantenlänge a) wird die größte Kugel herausgedreht. Was wiegt mehr, die Kugel oder der Abfallspan? Die Antwort ist zu begründen!

Aufgabe 011015:
Es ist

a) auf einer gegebenen Geraden ein Punkt zu konstruieren, der von zwei gegebenen und nicht auf der Geraden liegenden Punkten A und B gleich weit entfernt ist;

b) auf einem gegebenen Kreis ein Punkt zu konstruieren, der von zwei gegebenen und nicht auf dem Kreis liegenden Punkten A und B gleich weit entfernt ist.

Ist dieser Punkt stets vorhanden? Gibt es nur einen solchen Punkt?

Aufgabe 011016:
Eine sechsstellige Zahl beginnt an der höchsten Stelle mit der Ziffer 1. Streicht man diese Ziffer und hängt sie hinten an die Zahl an, so erhält man das Dreifache der ursprünglichen Zahl.

a) Wie heißen die beiden Zahlen?

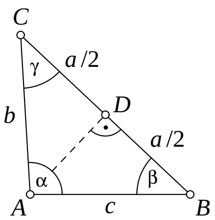
b) Kann man mit der Ausgangszahl weitere ähnliche Aufgaben bilden? (Beispiele)

c) Aus welcher Aufgabe ist die Ziffernfolge der Ausgangszahl bekannt?

1. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 011011:



Wegen $2\alpha > 180°$ kann α kein Basiswinkel sein.

Für die Größe der beiden Basiswinkel $\sphericalangle ABC = \beta$ und $\sphericalangle ACB = \gamma$ gilt dann

$$\beta = \gamma = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 43,29°.$$

Da $AC = b$ wie AB ein Schenkel ist, gilt $b = c = 87,51$ m. Zeichnet man die auf $BC = a$ stehende Höhe AD ein, so erhält man im entstehenden rechtwinklichen Dreieck ABD die Gleichung $\cos\beta = \frac{a}{2c}$ und damit $a = 2c \cdot \cos\beta = 127,40$ m.

Aufgeschrieben und gelöst von Christiane Behns

Lösung 011012:

Für die Menge des heute in 37 min produzierten Gases brauchte man 1913 genau $365 \cdot 24 \cdot 60 = 525\,600$ min. Die Gasproduktion steigerte sich also um das $\frac{525\,600}{37}$ fache, also um

$$\left(\frac{525\,600}{37} - 1\right) \cdot 100\,\% = 1\,420\,441\,\%.$$

Aufgeschrieben und gelöst von Christiane Behns

Lösung 011013:

Der Zug fährt mit der Geschwindigkeit v in 9 s an dem Fußgänger vorbei, der ihm in dieser Zeit 9 m entgegenkommt. Der Zug fährt also eine Strecke von $s - 9$ m, wobei s die Länge des Zuges ist. Damit ist

$$v = \frac{s - 9\text{ m}}{9\text{ s}}.$$

Da der Zug in 27 s eine Strecke von 171 m + s zurücklegt, ist aber auch

$$v = (\frac{171\text{ m} + s}{27\text{ s}}.$$

Nach Gleichsetzen der beiden Gleichungen und Umstellen erhalten wir $s = 99$ m und durch Einsetzen $v = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = (3{,}6 \cdot 10)\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 36\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Aufgeschrieben und gelöst von Christiane Behns

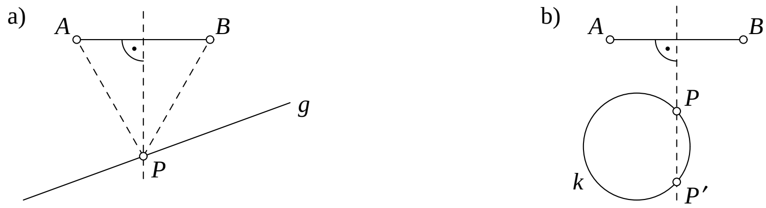
Lösung 011014:

Die Kugel hat den Durchmesser a und damit ein Volumen von $\frac{\pi}{6}a^3$. Der Würfel hat ein Volumen von a^3, der Abfallspan also ein Volumen von $\left(1 - \frac{\pi}{6}\right)a^3$. Das Volumen der Kugel ist somit etwas größer als das des

Verschnitts, denn es gilt: $\pi > 3 \Longrightarrow \frac{\pi}{3} > 1 \Longrightarrow \frac{\pi}{6} > 1 - \frac{\pi}{6}$.

Aufgeschrieben und gelöst von Christiane Behns

Lösung 011015:



a) (Bild a) Der gesuchte Punkt P ist der Schnittpunkt der gegebenen Geraden g mit der Mittelsenkrechten von AB. Wenn diese parallel zu g verläuft, gibt es keine Lösung.

b) (Bild b) Wie oben. Wenn die Mittelsenkrechte mit dem gegebenen Kreis k keinen Punkt gemeinsam hat, gibt es keine Lösung. Ist sie Tangente, erhält man eine, ist sie Sekante, zwei Lösungen P und P'.

Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Weber

Lösung 011016:

a) Teilt man diese sechsstellige Zahl x in ihre 1. Ziffer 1 und die restliche 5-stellige Zahl a, so läßt sich dies wie folgt ausdrücken: $x = 100\,000 + a$.

Gleichzeitig gilt für die zweite sechsstellige Zahl y, daß sie aus x durch Streichen der 1. Ziffer und Anfügen dieser Ziffer am Ende der Zahl entsteht, also: $y = 10 \cdot a + 1$.

Ferner wird gesagt, daß gelte: $y = 3x$ und somit $10 \cdot a + 1 = 3 \cdot (100\,000 + a)$. Nach Umformen erhält man $7\,a = 3 \cdot 100\,000 - 1$, was ergibt: $a = 42\,857$.

Für x und y ergibt sich damit: $x = 142\,857$, $y = 428\,571$.

b) Es gelten folgende Aussagen:

Streicht man einer sechsstelligen Zahl ihre ersten beiden Ziffern 14 und hängt sie an die verbleibende vierstellige Zahl, so entsteht eine doppelt so große wie die ursprüngliche Zahl.

Streicht man einer sechsstelligen Zahl ihre letzten beiden Ziffern 57 und stellt sie der verbleibenden vierstelligen Zahl voran, so entsteht eine viermal so große Zahl wie die ursprüngliche Zahl.

Streicht man einer sechsstelligen Zahl ihre letzte Ziffer 7 und stellt sie der verbleibenden fünfstelligen Zahl voran, so entsteht eine fünfmal so große Zahl wie die ursprüngliche Zahl.

Streicht man einer sechsstelligen Zahl ihre ersten drei Ziffern 142 und hängt sie an die verbleibende dreistellige Zahl, so entsteht eine sechsmal so große wie die ursprüngliche Zahl.

c) Die Aufgabe kann aus der Antwort zu Teil a) entnommen werden:

$$x = 100\,000 + a = 100\,000 + \frac{3 \cdot 100\,000 - 1}{7} \qquad \text{sowie} \qquad y = 10 \cdot a + 1 = 10 \cdot \frac{3 \cdot 100\,000 - 1}{7} + 1.$$

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel