1. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Saison 1961/1962

Aufgaben und Lösungen

1. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 011021:

Im Jahre 1970 sollen in der Sowjetunion mindestens 900 Milliarden kWh und 1980 wenigstens 2 700 Milliarden kWh Elektroenergie erzeugt werden. Für die USA nimmt die Bundesenergiekommission 1 475 Milliarden kWh bzw. 2 230 Milliarden kWh an.

Wann würde die UdSSR die USA in der Erzeugung von Elektroenergie überholt haben, wenn man eine gleichmäßige Steigerung der Energieerzeugung annimmt?

Aufgabe 011022:

An quaderförmigen Werkstücken mit den Abmessungen $a = 120\,\text{mm}$, $b = 60\,\text{mm}$ und $c = 17\,\text{mm}$ soll die Dicke c von 17 mm auf 15 mm verringert werden. Das geschieht mit Hilfe einer Kurzhobelmaschine. Folgende Einstellungen sind möglich:

(1) 46 Hübe je Minute, Hublänge bis zu 180 mm,

(2) 108 Hübe je Minute, Hublänge bis zu 77 mm.

a) Wie ist das Werkstück einzuspannen und welche Einstellung ist zu wählen, damit die Arbeit möglichst schnell durchgeführt wird?

b) Welches Ergebnis erhält man für ein Werkstück mit den Abmessungen $a = 150\,\text{mm}$, $b = 50\,\text{mm}$, $c = 17\,\text{mm}$?

Anmerkung: Der Vorschub möge 1,5 mm betragen.

Aufgabe 011023:

Ist es möglich, ein beliebiges ungleichseitiges Dreieck in zwei kongruente Dreiecke zu zerlegen? Die Behauptung ist zu begründen!

Aufgabe 011024:

Es ist ein beliebiges Dreieck zu zeichnen. Dieses Dreieck soll durch eine zu keiner der Dreieckseiten parallelen Geraden so geschnitten werden, daß das abgeschnittene dem ursprünglichen Dreieck ähnlich ist. Die Konstruktion ist zu begründen!

Aufgabe 011025:

Gegeben ist die Zahl $9^{(9^9)}$.

a) Wieviel Ziffern hat diese Zahl etwa? (Auf vier geltende Ziffern runden.)

b) Wie lang müßte der Streifen sein, auf den man diese Zahl drucken wollte, wenn die Ziffernbreite 2 mm betragen würde?

c) Mit welcher Ziffer endet die gesuchte Zahl?

1. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 011021:

Die produzierte Energiemenge E (in Mrd. kWh) läßt sich, wenn eine gleichmäßige Steigerung vorausgesetzt wird, mit linearen Funktionen beschreiben,

diejenige der Sowjetunion ist $E_{\text{SU}} = 900 + 180x$,

die der USA $E_{\text{USA}} = 1\,475 + 75{,}5x$,

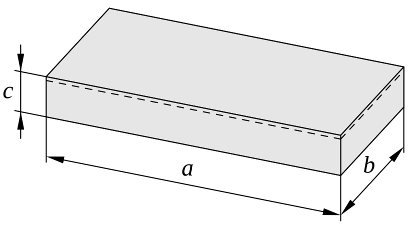
wobei x die Anzahl der Jahre nach 1970 ist. Die Energieproduktion beider Länder ist gleich, wenn

$$E_{\text{SU}} = E_{\text{USA}}, \text{ also } 900 + 180x = 1\,475 + 75{,}5x$$

oder nach Umstellen $x \approx 5{,}5$ gilt. Dies wird somit im Jahre 1976 der Fall sein.

Aufgeschrieben und gelöst von Christiane Behns

Lösung 011022:



a) Bei Einstellung 1 wird man so einspannen, daß a in Hubrichtung liegt. Man benötigt für eine Fläche $\frac{60}{1{,}5} = 40$ Hübe, also $\frac{40}{46} = \frac{20}{23}$ min reine Arbeitszeit.

   Bei Einstellung 2 spannt man so ein, dass b in Hubrichtung liegt. Man benötigt dann $\frac{120}{1{,}5} = 80$ Hübe, also eine Arbeitszeit von $\frac{80}{108} = \frac{20}{27}$ min.

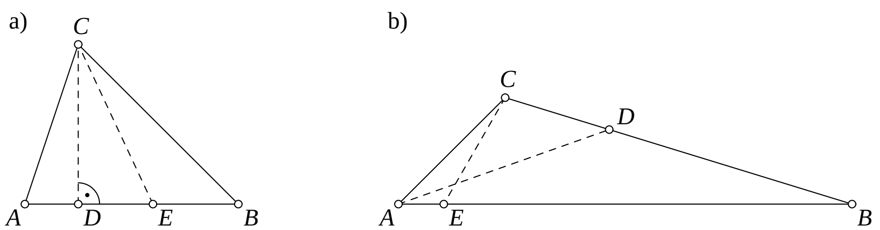
   Damit ist Einstellung 2 rationeller.

b) Bei Einstellung *1* wählt man die Einspannung wie oben; man braucht 34 Hübe, also $\frac{17}{23}$ min. Bei Einstellung *2* wählt man ebenfalls die Einstellung wie oben und braucht 100 Hübe, also eine Arbeitszeit von $\frac{25}{27}$ min. Hier ist damit Einstellung *1* rationeller.

Aufgeschrieben und gelöst von Christiane Behns

Lösung 011023:

Nein, es ist nicht möglich, ein beliebiges ungleichseitiges Dreieck in zwei kongruente Dreiecke zu zerlegen.



Beweis:

Zunächst ist festzustellen, dass der Schnitt durch das Dreieck ABC durch einen der Eckpunkte gehen muss, da ansonsten ein Viereck entsteht.

Angenommen, ABC sei spitzwinklig (Bild a). Dann erzeugt jeder geradlinige Schnitt durch einen Eckpunkt, hier C, an der gegenüberliegenden Seite AB zwei Winkel, von denen entweder beide rechtwinklig ($\sphericalangle CDA = \sphericalangle CDB = 90°$) oder einer spitz- und der andere stumpfwinklig ($\sphericalangle CEA < \sphericalangle CEB$) sind.

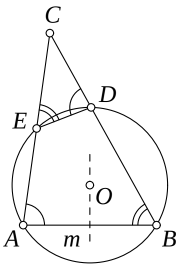
Im ersten Fall können die Dreiecke CDA und CDB nicht kongruent sein, da ihre Hypotenusen nach Voraussetzung ungleich lang sind; im zweiten Fall entsteht nur ein stumpfer Winkel, der keinen „Partner“ im anderen Teildreieck hat.

Ist das zu teilende Dreieck ABC dagegen stumpfwinklig (Bild b), so erzeugt ein Schnitt durch einen der Eckpunkte, an denen spitze Innenwinkel vorliegen, hier AD, auf der gegenüberliegenden Seite zwar einen stumpfen Winkel, der aber stets größer als der stumpfe Innenwinkel in $\triangle ABC$ ist. Bei einem Schnitt durch den Eckpunkt mit dem stumpfen Innenwinkel, hier CE, gilt bezüglich der rechten Winkel dasselbe wie im ersten Fall. Selbst wenn dabei ein stumpfer Innenwinkel zustande kommt, hier $\sphericalangle AEC$, kann dieser nicht gleich dem verbleibenden Winkel $\sphericalangle ECB$ sein, weil dazu zwei Seiten des Dreiecks parallel sein müssten ($AB \parallel BC$), was nicht geht.

Es ist somit nicht möglich, ein beliebiges Dreieck in zwei kongruente Dreiecke zu zerlegen. □

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 011024:



Konstruktion:

(Bild) O. B. d. A. sei AB die kürzeste der Seiten des Dreiecks ABC. Wir wählen auf der Mittelsenkrechten m der Seite AB einen Punkt O derart, dass ein Kreis mit Mittelpunkt O durch die Eckpunkte A und B geht und weiterhin noch die beiden anderen Seiten in den Punkten D bzw. E schneidet. Das Dreieck DEC ist dann dem ursprünglichen Dreieck ähnlich. Die kürzeste Seite als Sehne des Kreises auszuwählen, garantiert dabei, dass die Schnittpunkte D und E tatsächlich existieren.

Beweis:

$ABDE$ ist ein Sehnenviereck, in dem sich gegenüberliegende Winkel stets zu einem Gestreckten ergänzen. Also gilt:

$$\sphericalangle CAB = 180° - \sphericalangle BDE = \sphericalangle CDE,$$

$$\sphericalangle CBA = 180° - \sphericalangle AED = \sphericalangle CED.$$

Das abgeschnittene Dreieck DEC hat somit dieselben Innenwinkel wie das ursprüngliche Dreieck ABC und ist diesem daher ähnlich. Außerdem liegen sich gleiche Winkel stets gegenüber, so dass für alle nichtgleichschenkligen, also beliebigen Dreiecke $AB \nparallel ED$ gilt. □

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 011025:

a) Die Anzahl der Ziffern ist gleich der kleinsten ganzen Zahl, die größer ist als

$$\log_{10} 9^{(9^9)} = 9^9 \cdot \log_{10} 9.$$

Wegen $9^9 = 387\,420\,489$ und $\log_{10} 9 \approx 0{,}954\,243$ hat $9^{(9^9)}$ somit rund 369 700 000 Stellen.

b) So ein Streifen müßte ungefähr

$$369\,700\,000 \cdot 2\text{ mm} = 739\,400\,000\text{ mm} = 739{,}4\text{ km}$$

lang sein.

c) Da 9^9 eine ungerade Zahl ist, endet die Zahl wegen

$$9^{(9^9)} \equiv (-1)^{(9^9)} \equiv -1 \equiv 9 \bmod 10$$

auf die Ziffer 9.

Aufgeschrieben und gelöst von Christiane Behns