1. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1961/1962

Aufgaben und Lösungen

1. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 011041:

Wie auf dem XXII. Parteitag der KPdSU mitgeteilt wurde, wird in der Sowjetunion von 1960 bis 1980 die Produktion von Produktionsmitteln (d.s. Rohstoffe, Maschinen, Ausrüstungen für Industrie, Landwirtschaft und Verkehr usw.) auf das 6,8fache steigen. Aber auch die Produktion von Gebrauchsgütern (Güter, die für den Bedarf der Bevölkerung bestimmt sind) soll stark anwachsen, sie soll auf das Fünffache steigen. Die gesamte Industrieproduktion steigt auf das 6,2fache.

a) Wieviel Prozent der gesamten Industrieproduktion betrug der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln im Jahr 1960?

b) Wieviel Prozent würde er im Jahre 1980 betragen?

Aufgabe 011042:

Auf einem Fluß mit konstanter Strömungsgeschwindigkeit v fährt ein Motorboot mit konstanter Eigengeschwindigkeit c stromab nach einem Ziel, das vom Start die Entfernung s hat, und wieder zurück. Ein anderes Motorboot fährt mit der gleichen Eigengeschwindigkeit zu einem ebenfalls in der Entfernung s, aber genau senkrecht zur Strömungsrichtung liegenden Ziel und wieder zurück.

a) Wieviel reine Fahrzeit benötigen die beiden Boote?

b) Welches Ergebnis erhält man für $s = 250$ m, $v = 150$ m/min und $c = 250$ m/min?

Aufgabe 011043:

Es sei

$$s = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}.$$

Berechnen Sie s^2 und s^3 und versuchen Sie, einen rationalen Wert für s zu finden! (Die Wurzelwerte dürfen nicht durch Näherungswerte ersetzt werden.)

Aufgabe 011044:

Folgender Satz ist zu beweisen:

> Wenn die von A auf BC gefällte Höhe eines Dreiecks mittlere Proportionale zwischen den Strecken ist, in die sie $\overline{BC}$ teilt, dann ist das Dreieck rechtwinklig.

Aufgabe 011045:

Gegeben sei ein Winkel $\alpha = 40°$.

Konstruieren Sie den Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius $r = 5$ cm, wobei dieser Kreis aus den Schenkeln des Winkels die Strecken $a = 9$ cm und $b = 8$ cm ausschneiden soll! Die Konstruktion ist zu begründen!

Dürfen bei gegebenem α und Radius r die Längen von a und b beliebig gewählt werden? (Begründung!)

1. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 011041:

Seien a_0, b_0 und c_0 die Produktion von Produktionsmitteln, Gebrauchsgütern bzw. die gesamte Industrieproduktion im Jahr 1960 sowie a_1, b_1 und c_1 die avisierten Größen im Jahr 1980. Dann gilt $a_1 = 6{,}8\,a_0$, $b_1 = 5{,}0\,b_0$ und $c_1 = 6{,}2\,c_0$ und ferner $a_0 + b_0 = c_0$ und $a_1 + b_1 = c_1$ bzw. $6{,}8\,a_0 + 5{,}0\,b_0 = 6{,}2\,c_0$. Die erste Gleichung wird nun durch c_0, die zweite durch $6{,}2\,c_0$ dividiert. Dies liefert das lineare Gleichungssystem

$$\frac{a_0}{c_0} + \frac{b_0}{c_0} = 1, \qquad \frac{34}{31}\frac{a_0}{c_0} + \frac{25}{31}\frac{b_0}{c_0} = 1,$$

welches die Lösung $\frac{a_0}{c_0} = \frac{2}{3}$ und $\frac{b_0}{c_0} = \frac{1}{3}$ besitzt.

a) Im Jahr 1960 betrug der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln demnach $\frac{a_0}{c_0} = \frac{2}{3} = 66{,}7\,\%$.

b) Im Jahr 1980 hätte dieser Anteil $\frac{34}{31}\frac{a_0}{c_0} = \frac{68}{93} = 73{,}1\,\%$ betragen.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 011042:

a) Wenn das Boot mit der Strömung fährt, addieren sich die Geschwindigkeiten. Fährt es ihr entgegen, ist die Differenz die Effektivgeschwindigkeit. Die Fahrzeit ist die Summe aus dem Abschnitt, auf dem das Boot mit $c + v$ fährt und dem mit $c - v$:

$$t_1 = \frac{s}{c+v} + \frac{s}{c-v} = \frac{2vs}{c^2 - v^2}.$$

Bewegt es sich aber senkrecht zur Strömung, spielt die Geschwindigkeit des Flusses keine Rolle (sie muss natürlich vom Boot kompensiert werden). Dann ist $t_2 = 2s/c$.

b) Nach Einsetzen der Zahlenwerte folgt: $t_1 = 1\frac{14}{30}$ min, im anderen Fall: $t_2 = 2$ min.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 011043:

Wir setzen $s = u + v$ mit $u = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}$ und $v = \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$. Dann gilt

$$u^3 + v^3 = (20 + 14\sqrt{2}) + (20 - 14\sqrt{2}) = 40$$

und weiter nach der 3. binomischen Formel

$$u^3 v^3 = (20 + 14\sqrt{2}) \cdot (20 - 14\sqrt{2}) = 400 - 196 \cdot 2 = 8,$$

also $uv = 2$. Ferner gilt stets

$$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = 3uv(u+v) + (u^3+v^3)$$
$$\Longrightarrow \quad s^3 - 6s - 40 = 0.$$

Glücklicherweise lässt sich eine Wurzel dieser kubischen Gleichung (die bereits in reduzierter Form vorliegt) durch Probieren leicht finden, nämlich $s = 4$. Eine Polynomdivision durch $(s-4)$ liefert nun $s^3 - 6s - 40 = (s-4)(s^2+4s+10) = 0$, d. h. die anderen beiden Wurzeln sind komplex: $s_{2,3} = -2 + \sqrt{6}\,\mathrm{i}$. Der gesuchte rationale Wert für s beträgt also 4; die weiteren Potenzen sind demnach $s^2 = 16$ und $s^3 = 64$.

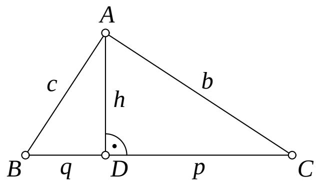
Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 011044:

Beweis:

Der Höhenfußpunkt von A auf BC sei D.

Mit den Bezeichnungen $h = \overline{AD}$, $q = \overline{BD}$ und $p = \overline{CD}$ sowie den üblichen Abkürzungen $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$ und $a = \overline{BC} = p + q$ folgt aus dem Satz des Pythagoras, angewandt auf die rechtwinkligen Dreiecke ΔADC und ΔADB:



$$b^2 + c^2 = (h^2+p^2) + (h^2+q^2) = 2h^2 + (p^2+q^2),$$
$$b^2 + c^2 + 2pq = 2h^2 + (p^2 + 2pq + q^2) = 2h^2 + (p+q)^2 = 2h^2 + a^2.$$

Nach Voraussetzung gilt $h^2 = pq$, so dass aus obiger Gleichung nach Subtraktion $b^2 + c^2 = a^2$ folgt.

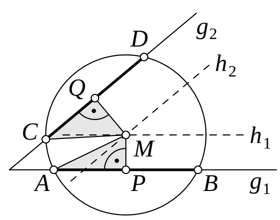
Nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras ist damit bewiesen, dass das Dreieck bei A rechtwinklig ist. □

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 011045:

Analyse:

Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises sei M. Der Kreis schneide die beiden Schenkel g_1 und g_2 des Winkels in den Punkten A, B bzw. C, D. Ferner seien MP und MQ die Lote auf g_1 bzw. g_2. Betrachten wir nun die rechtwinkligen Dreiecke APM und CQM, so sind diese durch ihre Hypotenusen $MA = MC = r$ sowie die Katheten $AP = \frac{a}{2}$ bzw. $CQ = \frac{b}{2}$ bekannt. Also sind auch die anderen beiden Katheten MP und MQ bekannt.



Daraus ergibt sich folgende Konstruktion:

Konstruktionsbeschreibung:

Die Strecken MP und MQ lassen sich aus den gegebenen Stücken mit Hilfe des Kongruenzsatzes SSW konstruieren. Nun werden zwei Parallelen $h_1 \parallel g_1$ und $h_2 \parallel g_2$ im Abstand MP bzw. MQ von den Schenkeln des Winkels gezogen. Ihr Schnittpunkt ist der gesuchte Mittelpunkt M.

Es ist zu beachten, dass sich ein anderer Mittelpunkt ergibt, wenn die Abschnitte a und b auf den Schenkeln vertauscht werden.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht