1. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 11
Saison 1961/1962

Aufgaben und Lösungen

1. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 11
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 011111:

Es ist zu beweisen, daß bei beliebigem n (n eine natürliche Zahl) die Zahl $6^{2n} - 1$ durch 7 teilbar ist.

Aufgabe 011112:

Ein Dampfer fährt auf einem Fluß von A nach B 3 Stunden und bei gleicher Maschinenleistung von B nach A $4\frac{1}{2}$ Stunden.

Wie lange braucht ein nur von der Strömung getriebenes Fahrzeug für den Weg von A nach B?

Aufgabe 011113:

Kann man einen Würfel durch eine Ebene so teilen, daß der erhaltene Schnitt ein

a) gleichseitiges Dreieck,

b) Quadrat,

c) regelmäßiges Fünfeck,

d) regelmäßiges Sechseck

ist? Die Behauptungen sind zu beweisen!

Aufgabe 011114:

Es seien ein Dreieck $P_1P_2P_3$ und ein beliebiger Punkt P im Innern des Dreiecks gegeben. Die Schnittpunkte der Geraden P_1P, P_2P bzw. P_3P mit den gegenüberliegenden Seiten seien Q_1, Q_2, Q_3.

Es ist zu beweisen, daß unter den Verhältnissen

$$\frac{P_1P}{PQ_1}, \quad \frac{P_2P}{PQ_2}, \quad \frac{P_3P}{PQ_3}$$

wenigstens eines nicht größer als 2 und wenigstens eines nicht kleiner als 2 ist.

Aufgabe 011115:

Setzt man einen Würfel aus 8 gleichen Würfeln zusammen, wobei in jeder Dimension 2 Würfel nebeneinanderliegen, und streicht ihn mit Farbe an, dann besteht der Würfel aus 8 Würfeln, bei denen je 3 Flächen angestrichen sind. Nun soll ein Würfel aus gleichen Würfeln so zusammengesetzt werden, daß in jeder Dimension 3 Würfel nebeneinanderliegen. Der zusammengesetzte Würfel werde wieder angestrichen.

a) Wieviel der kleinen Würfel haben keine angestrichene Fläche, wieviel haben eine, wieviel zwei und wieviel drei angestrichene Flächen?

b) Was erhält man, wenn in jeder Dimension 4 Würfel nebeneinanderliegen?

c) Versuchen Sie, eine Formel für n in jeder Dimension nebeneinanderliegender Würfel zu finden, und beweisen Sie diese Formel!

1. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 11
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 011111:

Es ist zu zeigen, dass 7 Teiler von $6^{2n} - 1$ für alle natürlichen Zahlen n ist.

Die Behauptung können wir auch schreiben als $7 \cdot z = 6^{2n} - 1$, wobei z eine natürliche Zahl ist. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion:

Als *Induktionsanfang* finden wir die Behauptung für $n = 0$ durch $6^{2\cdot 0} - 1 = 1 - 1 = 0 = 7 \cdot 0$ bestätigt.

Zum *Induktionsschritt* setzen wir voraus, dass es zu jedem $n = k$ ein $z_k \in \mathbb{N}$ gibt, für welches die Gleichung $7 \cdot z_k = 6^{2k} - 1$ gilt.

Die *Induktionsbehauptung* lautet dann, dass es für $n = k + 1$ auch ein $z_{k+1} \in \mathbb{N}$ gibt, das die Gleichung $7 \cdot z_{k+1} = 6^{2(k+1)} - 1$ erfüllt.

Den *Induktionsbeweis* führen wir nun mit folgender Gleichungskette:

$$\begin{aligned} 6^{2(k+1)} - 1 &= 6^{2k+2} - 1 = 36 \cdot 6^{2k} - 1 = 36 \cdot 6^{2k} - 36 + 35 = 36 \cdot (6^{2k} - 1) + 35 \\ &= 36 \cdot 7 \cdot z_k + 7 \cdot 5 = 7 \cdot (36 z_k + 5) = 7 \cdot z_{k+1}. \end{aligned}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Korinna Grabski

Lösung 011112:

In beiden Fahrtrichtungen auf dem Fluss können wir das Weg-Zeit-Gesetz der gleichförmigen Bewegung $s = vt$ annehmen. Für die Fahrt in Strömungsrichtung gilt damit $v = v_\mathrm{D} + v_\mathrm{S}$, für die Fahrt entgegen der Strömung gilt $v = v_\mathrm{D} - v_\mathrm{S}$, wobei v_D die Eigengeschwindigkeit des Dampfers und v_S die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses ist. Es ist also

$$s = (v_\mathrm{D} + v_\mathrm{S}) \cdot (3\,\mathrm{h}) = (v_\mathrm{D} - v_\mathrm{S}) \cdot (4{,}5\,\mathrm{h}) \quad \Longrightarrow \quad v_\mathrm{D} = \frac{(4{,}5\,\mathrm{h} + 3\,\mathrm{h})}{(4{,}5\,\mathrm{h} - 3\,\mathrm{h})} v_\mathrm{S} = 5 v_\mathrm{S},$$

und damit $s = (v_\mathrm{D} + v_\mathrm{S}) \cdot (3\,\mathrm{h}) = 6 v_\mathrm{S} \cdot (3\,\mathrm{h})$. Für ein Boot, das nur mit der Strömung treibt, gilt $s = v_\mathrm{S}\, t$; mit obiger Gleichung also

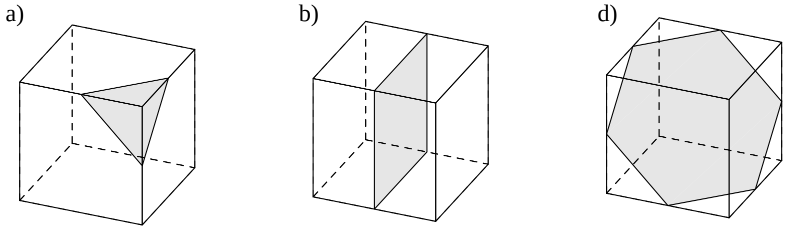
$$s = 6 v_\mathrm{S} \cdot (3\,\mathrm{h}) = v_\mathrm{S}\, t.$$

Daraus folgt die Fahrzeit für ein nur von der Strömung getriebenes Fahrzeug von $t = 18\,\mathrm{h}$.

Aufgeschrieben und gelöst von Korinna Grabski

Lösung 011113:

Die möglichen Schnitte sind in den folgenden Bildern dargestellt:



a) Ja. Jeder Schnitt, der entlang dreier zusammentreffender Kanten gleiche Strecken abschneidet, erzeugt ein gleichseitiges Dreieck als Schnittfläche. Dies ist leicht einzusehen, da alle durch den Schnitt entstehenden rechtwinkligen Dreiecke auf den Würfeloberflächen kongruent sind (SWS), mithin auch die Hypotenusen.

b) Ja. Jeder Schnitt parallel zu einer Würfelfläche ergibt ein Quadrat, welches der Würfelfläche kongruent ist.

c) Nein. Wäre eine Schnittfläche eines Würfels bei einem ebenen Schnitt ein reguläres Fünfeck, so würden je zwei verschiedene Kanten des Fünfecks zu zwei verschiedenen Seitenflächen des Würfels gehören (denn ansonsten läge das ganze Fünfeck auf einer Seitenfläche, was nicht geht). Zwei verschiedene dieser fünf Seitenflächen dürften aber nicht parallel sein, weil sich (die Verlängerungen von) je zwei verschiedenen Fünfeckskanten in einem Punkt schneiden. Da es aber im Würfel nur sechs Seitenflächen gibt, von denen je zwei gegenüberliegende parallel sind, findet man keine fünf paarweise nichtparallelen Seitenflächen. Es gibt also keinen solchen ebenen Schnitt.

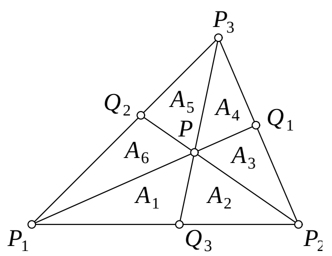
d) Ja. Der Schnitt trifft - wie im Bild gezeigt - die Würfelkanten in deren Mittelpunkten. Alle Seiten des sechseckigen Schnitts haben offensichtlich die Länge $\frac{\sqrt{2}}{2}a$, wenn a die Länge einer Kante bezeichnet. Der angegebene Schnitt ist auch tatsächlich eben, da alle Abstände der Eckpunkte des Sechsecks vom oberen–rechten–vorderen (oder unteren–linken–hinteren) Eckpunkt des Würfels untereinander gleich, nämlich $\frac{\sqrt{5}}{2}a$ sind.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 011114:

Beweis: Nennen wir die Teilflächen, in die das Dreieck $P_1P_2P_3$ durch P zerlegt wird, $A_1, A_2, \ldots, A_6$, die gesamte Fläche sei A. Dann gilt, da sich die Flächeninhalte von Dreiecken mit gleicher Höhe wie die zugehörigen Grundseiten verhalten:

$$\begin{aligned} x &= \frac{P_1P}{PQ_1} = \frac{A_1+A_2}{A_3} = \frac{A_5+A_6}{A_4} = \frac{A-A_3-A_4}{A_3+A_4}, \\ y &= \frac{P_2P}{PQ_2} = \frac{A_3+A_4}{A_5} = \frac{A_1+A_2}{A_6} = \frac{A-A_5-A_6}{A_5+A_6}, \\ z &= \frac{P_3P}{PQ_3} = \frac{A_5+A_6}{A_1} = \frac{A_3+A_4}{A_2} = \frac{A-A_1-A_2}{A_1+A_2}. \end{aligned}$$



Betrachten wir nun die Teildreiecke P_1P_2P, P_2P_3P, P_3P_1P, deren Flächeninhalte A_1+A_2, A_3+A_4 bzw. A_5+A_6 betragen und deren Summe A ist, so ist nach den obigen Gleichungen offensichtlich, dass wenigstens eines der Verhältnisse

$$\frac{A_1+A_2}{A} = \frac{1}{1+z}, \qquad \frac{A_3+A_4}{A} = \frac{1}{1+x}, \qquad \frac{A_5+A_6}{A} = \frac{1}{1+y} \tag{1}$$

(deren Summe 1 ergibt) nicht größer und eines nicht kleiner als $\frac{1}{3}$ ist. Dabei ist der Fall, dass alle Verhältnisse gleich $\frac{1}{3}$ sind, eingeschlossen. Diese Aussage ist nach elementarer Umformung der Gleichungen (1) äquivalent damit, dass wenigstens eine der Größen x, y, z nicht größer als 2 und wenigstens eine nicht kleiner als 2 ist.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 011115:

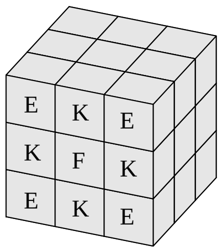
a) (Bild a) Für einen Würfel mit den Abmaßen $3 \times 3 \times 3$ haben

- 8 kleine Eckwürfel (E) drei bemalte Flächen,
- 12 kleine Kantenwürfel (K) zwei bemalte Flächen,
- 6 kleine Flächenwürfel (F) eine bemalte Fläche und
- 1 kleiner Innenwürfel keine bemalte Fläche.

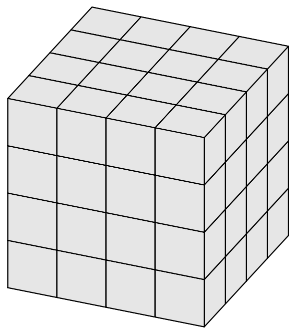
b) (Bild b) Für einen Würfel mit den Abmaßen $4 \times 4 \times 4$ haben

- 8 kleine Eckwürfel drei bemalte Flächen,
- $12\,(4-2) = 24$ kleine Kantenwürfel zwei bemalte Flächen,
- $6\,(4-2)^2 = 24$ kleine Flächenwürfel eine bemalte Fläche und
- $(4-2)^3 = 8$ kleine Innenwürfel keine bemalte Fläche.

a)



b)



c) Für einen Würfel mit den Abmaßen $n \times n \times n$ haben

- 8 kleine Eckwürfel drei bemalte Flächen,
- $12\,(n-2)$ kleine Kantenwürfel zwei bemalte Flächen,
- $6\,(n-2)^2$ kleine Flächenwürfel eine bemalte Fläche und
- $(n-2)^3$ kleine Innenwürfel keine bemalte Fläche.

Beweis: Kleine Würfel mit drei bemalten Flächen liegen genau an den Ecken des großen Würfels. Da ein Würfel immer 8 Ecken hat, gibt es für jede Größe des Würfels immer 8 kleine Würfel mit drei bemalten Flächen.

Kleine Würfel mit zwei bemalten Flächen liegen genau auf den Kanten des großen Würfels, aber nicht auf den Ecken. Eine Kante eines $(n\times n \times n)$-Würfels ist n kleine Würfel lang. Dazu gehören auch die zwei Eckwürfel. Damit erhält man für jede Kante des Würfels $n-2$ kleine Würfel mit 2 bemalten Flächen. Da ein Würfel immer 12 Kanten hat, gibt es für einen $(n\times n \times n)$-Würfel immer $12\,(n-2)$ kleine Würfel mit zwei bemalten Flächen.

Kleine Würfel mit einer bemalten Fläche liegen auf den Seiten des großen Würfels, aber nicht auf den Kanten. Eine Seite eines $(n\times n \times n)$-Würfels ist n^2 kleine Würfel groß. Dazu gehören auch die vier

Kanten. In jeder Dimension müssen also 2 Würfel abgezogen werden. Damit erhält man für jede Seite des Würfels $(n-2)^2$ kleine Würfel mit einer bemalten Fläche. Da ein Würfel immer 6 Seiten hat, gibt es für einen $(n \times n \times n)$-Würfel immer $6\,(n-2)^2$ kleine Würfel mit einer bemalten Fläche.

Kleine Würfel mit keiner bemalten Fläche liegen im Inneren des Würfels. Der $(n \times n \times n)$-Würfel besteht aus n^3 kleinen Würfeln. Dazu gehören auch die sechs Seiten. In jeder Dimension müssen also 2 Würfel abgezogen werden. Damit erhält man für das Innere des Würfels $(n-2)^3$ kleine Würfel. Damit gibt es für einen $(n \times n \times n)$-Würfel immer $(n-2)^3$ kleine Würfel mit keiner bemalten Fläche.

Zur Probe werden alle ermittelten Anzahlen addiert:

$$8 + 12(n-2) + 6(n-2)^2 + (n-2)^3 = n^3,$$

in Übereinstimmung damit, dass der Würfel mit den Abmaßen $n \times n \times n$ aus genau n^3 kleinen Würfeln besteht.

Aufgeschrieben und gelöst von Korinna Grabski