1. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 11
Saison 1961/1962

Aufgaben und Lösungen

1. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 11
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 011131:

Ein Kraftwagen, der mit einer Geschwindigkeit von 90 km/h fährt, wird gebremst und kommt nach 70 m zum Stehen.

Ist die in der Straßenverkehrsordnung vorgeschriebene Bremsverzögerung von mindestens 4,0 m/s^2 eingehalten worden oder nicht? Begründen Sie Ihre Feststellung!

Aufgabe 011132:

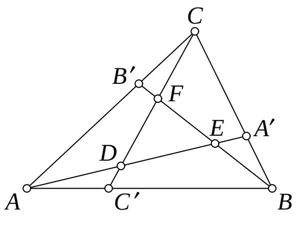
Gibt es eine ganze Zahl $n > 0$, die mit 6 multipliziert ein Produkt ergibt, das die gleichen Ziffern wie die ursprüngliche Zahl, aber in umgekehrter Reihenfolge enthält? Die Behauptung ist zu begründen!

Aufgabe 011133:

In einem Betrieb werden Ventilatoren hergestellt. Die Kosten für Material, Lohn und Energie betrugen bisher 19,20 M je Ventilator. Eine sozialistische Arbeitsgemeinschaft von Arbeitern und Ingenieuren macht den Vorschlag, durch Umbau der vorhandenen Maschinen und durch Anschaffung einer neuen Maschine die Arbeitszeit und die Materialkosten wesentlich zu senken, so daß die oben genannten Kosten je Stück nur noch 13,15 M je Ventilator betragen. Für den Umbau und die Anschaffung der neuen Maschine müssen aber insgesamt 13 500,- M aufgewandt werden.

Wieviel Ventilatoren müßten mindestens jährlich hergestellt werden, damit das neue Verfahren rentabel wird? Dabei soll ein Drittel der Kosten für die neuen Einrichtungen jährlich abgeschrieben werden, d. h. um diesen Betrag müssen sich die Gesamtkosten verringern.

Aufgabe 011134:



Es ist der folgende Satz zu beweisen:

Teilt man die Seiten eines Dreiecks ABC im Verhältnis 1 : 2 und verbindet man die Eckpunkte A, B bzw. C mit den Teilpunkten A', B' bzw. C', so bilden die Verbindungsgeraden ein Dreieck DEF, dessen Flächeninhalt gleich einem Siebentel des Flächeninhalts des ursprünglichen Dreiecks ist (vgl. die Abbildung).

Aufgabe 011135 = 011234:

Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB} = a = 6$ cm. M sei der Mittelpunkt der Strecke. Schlagen Sie mit $\overline{AM}$ um M den Halbkreis über $\overline{AB}$! Halbieren Sie $\overline{AM}$ und $\overline{MB}$ und schlagen Sie über beiden Strecken mit $\frac{\overline{AM}}{2}$ die beiden Halbkreise, die innerhalb des großen Halbkreises liegen!

Es ist der Mittelpunkt des Kreises zu konstruieren, der den großen Halbkreis von innen und die beiden kleinen Halbkreise von außen berührt! Die Konstruktion ist zu begründen!

1. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 11
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 011131:

Nach den bekannten Formeln für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung $\Delta s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ und $\Delta v = at$ folgt

$$\Delta s = \frac{-v_0}{2}t + v_0 t \;\Rightarrow\; t = \frac{2\Delta s}{v_0} \;\Rightarrow\; a = -\frac{v_0^2}{2\Delta s}.$$

Mit den gegebenen Werte $v_0 = 90\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $\Delta s = 70$ m ist die Bremsverzögerung $-a \approx 4,464\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, d.h. die vorgeschriebene Bremsverzögerung wurde eingehalten.

Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Weber

Lösung 011132:

Angenommen, es gäbe eine derartige Zahl n mit $m = 6n$. Dann müsste die erste Ziffer von n gleich 1 sein, weil die Ziffernanzahl von m gleich der Ziffernanzahl von n ist. Daher wäre die letzte Ziffer von m gleich 1, was unmöglich ist, da $6n$ gerade ist.

Also gibt es keine Zahl, die den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgeschrieben von Burkhard Thiele – Quelle: (2)

Lösung 011133:

$\text{Preis}_{alt} = 19{,}20$ M/Ventilator
$\text{Preis}_{neu} = 13{,}15$ M/Ventilator
Gesamtkosten = 13 500 M

$\text{Jahreskosten} = \frac{13\,500\text{ M}}{3} = 4\,500\text{ M}$

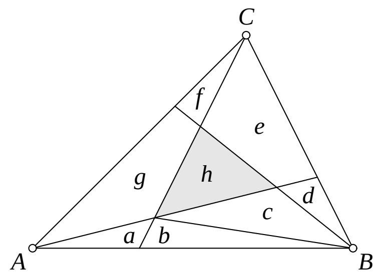
$$\begin{aligned} 19{,}20\text{ M/Ventilator}\cdot x &= 4\,500\text{ M} + 13{,}15\text{ M/Ventilator}\cdot x \\ 6{,}05\text{ M/Ventilator}\cdot x &= 4\,500\text{ M} \\ x &= 743{,}8\text{ Ventilatoren} \end{aligned}$$

Es müssen mindestens 744 Ventilatoren jährlich hergestellt werden.

Aufgeschrieben und gelöst von Korinna Grabski

Lösung 011134:

Beweis: Bezeichnen wir die durch die Teilung entstandenen Teilflächen mit $a, b, \ldots, h$ (s. Bild). Wir zeigen zunächst, dass $f+g = 6a$ gilt. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass sich die Flächeninhalte zweier Dreiecke bei gleicher Höhe wie die zugehörigen Grundseiten verhalten. Damit lassen sich folgende Gleichungen ablesen:



$$\begin{aligned} f+g &= (f+g+e+h) - (e+h) \\ &= 2\,(a+b+c+d) - 2\,(c+d) \\ &= 2\,(a+b) = 2a + 4a = 6a. \end{aligned}$$

Auf analoge Weise erhalten wir die Gleichungen $a+b+c = 6d$ und $d+e = 6f$, deren Addition

$$(f+g) + (a+b+c) + (d+e) = A - h = 6\,(a+d+f) \tag{1}$$

ergibt, wobei A der Flächeninhalt von $\triangle ABC$ ist. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} 2\,(a+b+c+d) &= e+f+g+h, \\ 2\,(d+e+f) &= g+a+b+c+h, \\ 2\,(f+g+a) &= b+c+d+e+h, \end{aligned}$$

deren Addition auf

$$3\,(a+d+f) = 3h \qquad \Longrightarrow \qquad a+d+f = h \tag{2}$$

führt. (1) und (2) ergeben dann die Behauptung $h = \frac{1}{7}A$. $\square$

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 011135 = 011234:

I. Analyse:

Der Berührungspunkt des Halbkreise über AM bzw. über MB mit dem zu konstruierenden Kreis k sei K bzw. L, der Berührungspunkt des Halbkreise über AB mit k sei N. Die Mittelpunkte von AM bzw. BM werden mit P bzw. Q bezeichnet.

Da die Tangenten von k und den Halbkreis über AM in K identisch sind und die Tangenten senkrecht auf den Radien stehen, geht die Strecke zwischen dem Mittelpunkt R vom Kreis k und P durch K.

Analog folgt, dass L auf RQ liegt. Da $RP = \frac{AM}{2} + RK = RQ$ gilt, ist $\sphericalangle PMR = 90°$ und es gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$\left(\frac{AM}{2}\right)^2 + (AM - RN)^2 = \left(\frac{AM}{2} + RK\right)^2.$$

Aus $RN = RK$ folgt

$$\frac{1}{4}(AM)^2 + (AM)^2 - 2(AM)(RN) + (RN)^2 = \frac{1}{4}(AM)^2 + (AM)(RN) + (RN)^2.$$

Also ist $(AM)^2 = 3(AM)(RN)$, d. h.

$$\begin{aligned} RN &= \frac{1}{3}AM = \frac{a}{6} = 1\text{ cm} \;\text{ und} \\ MR &= MT - RN = 2\text{ cm}. \end{aligned}$$

II. Konstruktionsbeschreibung:

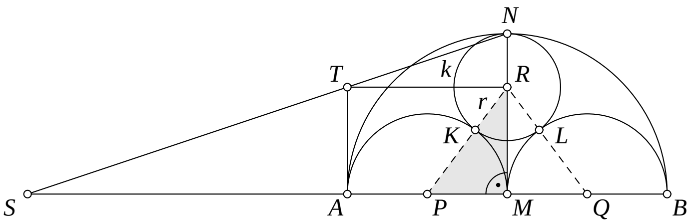
(1) Konstruiere die Mittelsenkrechte von AB und bezeichne den Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten und den Halbkreis über AB mit N.

(2) Nun konstruiere einen Punkt S auf der Verlängerung von AM über A hinaus mit $SM = 3AM$. Konstruiere die Senkrechte zu SM in A, bezeichne den Schnittpunkt dieser Senkrechten und SN mit T. Dann ist nach Strahlensatz $TN = \frac{1}{3}SN$.

(3) Konstruiere nun das Lot von T auf MN und bezeichne den Lotfußpunkt mit R, so ist nach Strahlensatz $NR = \frac{TN}{SN}MN = 1$ cm, d. h. R ist nach obiger Vorbetrachtung der Mittelpunkt des Kreises k, der die kleinen Halbkreise außen und den großen Halbkreis innen berüht.

(4) Schlage einen Kreis um R mit den Radius RN.

III. Konstruktion:



Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Weber

Quellenverzeichnis

(2) Engel, W./Pirl, U. Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band I. Verlag Volk und Wissen, 1972