2. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Saison 1962/1963

Aufgaben und Lösungen

2. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 020731:

Bei einem Preisausschreiben galt es, die Bilder von 4 verschiedenen Bauwerken 4 genannten Städten richtig zuzuordnen. 12 Prozent der Einsender hatten alles richtig gemacht, doppelt so viele hatten zwei Bauwerke und viermal so viele hatten ein Bauwerk richtig zugeordnet. 240 eingesandte Lösungen waren gänzlich falsch.

a) Wieviel Lösungen waren eingesandt worden?

b) Wieviel Einsender hatten 0, 1, 2, 3 und 4 Paare richtig zusammengestellt?

Aufgabe 020732:

In einen Flachstab von 2,5 m Länge sollen 15 Löcher in gleichem Abstand mit dem Durchmesser $d = 20$ mm gebohrt werden.

In welchem Abstand muß angekörnt werden, wenn an beiden Enden der Abstand bis zum Lochrand das 2,5fache des Lochdurchmessers betragen soll?

Aufgabe 020733:

Hans hat eine Eins geschrieben und ist in bester Stimmung. Als er heimkommt, läuft er daher frohgemut die 20 Stufen bis zu seiner Wohnung im 1. Stock so hinauf, daß er immer 3 Stufen hinauf- und 2 wieder hinuntersteigt, ohne eine Stufe auszulassen. Klaus, der im gleichen Haus im 4. Stock wohnt, meint: „Wenn du so weitergehst, bin ich eher vor meiner Tür als du vor deiner.“ Sie vereinbaren, daß sie beide im gleichen Rhythmus steigen, und daß der gewinnt, der zuerst auf dem Treppenabsatz vor seiner Wohnung steht. (Bis zum 4. Stock sind es 4 mal 20 Stufen.)

a) Wer gewinnt?

b) Wer würde gewinnen, wenn es bis zum 1. Stock nur 10 Stufen wären und die 3 anderen Treppen aber je 20 Stufen haben?

c) Wieviel Stufen müßte die unterste Treppe haben, damit beide Jungen gleichzeitig ankommen? (Auch hier sollen die 3 übrigen Treppen 20 Stufen haben.)

Begründe deine Antworten!

Aufgabe 020734:

Gegeben sei ein Dreieck ABC mit dem Inhalt F_1. Verbinde den Punkt A mit dem Mittelpunkt E der Seite a und verlängere die Strecke über E hinaus um sich selbst. Der Endpunkt sei D; der Inhalt des Dreiecks ADC sei F_2.

Berechne das Verhältnis $F_1 : F_2$!

Aufgabe 020735:

Gegeben ist ein Trapez $ABCD$ und innerhalb des Trapezes ein Kreis, der alle 4 Seiten berührt. Sein Mittelpunkt ist M. Beweise, daß der Winkel AMD und der Winkel BMC rechte Winkel sind!

Aufgabe 020736:

Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von dem die Summe s der Seiten a und b (mit $\overline{BC} = a$ und $\overline{AC} = b$), die Größe des Winkels $\sphericalangle ACB$ und die Länge h_a der von A auf die Gerade durch B und C gefällten Höhe gegeben sind: $s = 7\,\text{cm}$, $h_a = 4\,\text{cm}$, $\gamma = 100°$.

2. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 020731:

Zuerst einmal muss man hier feststellen, dass es nicht möglich ist, drei Bauwerke richtig und eines falsch zuzuordnen. $12\% + 24\% + 48\% = 84\%$ hatten wenigstens ein Bauwerk richtig. Daher entsprechen die verbleibenden 16% den 240 vollkommen falschen Einsendungen. Damit waren insgesamt 1500 Lösungen eingesandt worden, davon hatten 240, 720, 360, 0 bzw. 180 genau 0, 1, 2, 3 bzw. 4 Paare richtig.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (14)

Lösung 020732:

Zwischen den 15 Löchern gibt es 14 Abstände. Also muss der Abstand zwischen den Mittelpunkten der äußersten Löcher in 14 gleiche Teile geteilt werden. An beiden Enden geht das 2,5fache eines Lochdurchmessers ab, also 100 mm. Dazu kommen noch zweimal der Radius, da die Angabe vorher sich auf den Lochrand bezog. Es müssen also 2 380 mm in 14 Abschnitte zerlegt werden. Jeder muss also 170 mm lang sein.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (14)

Lösung 020733:

a) Die Anzahl der Schritte, die Klaus braucht, ist gleich der Anzahl der Stufen, also 80. Hans schafft in $3 + 2 = 5$ Schritten nur $3 - 2 = 1$ Stufe. Zu beachten ist aber, dass Hans von der 17. Stufe aus direkt auf seinen Stock kommt (mit drei Schritten), ohne die zwei Schritte wieder zurückzugehen. Also braucht Hans $17 \cdot 5 + 3 = 88$ Schritte, womit Klaus gewinnt.

b) Klaus braucht $10 + 60 = 70$ Schritte; Hans nur $7 \cdot 5 + 3 = 38$ und gewinnt in diesem Fall.

c) Gleichheit der Anzahl der Schritte bei s Stufen: $(s - 3) \cdot 5 + 3 = s + 60$, damit $5s - s = 60 - 3 + 15$ und weiter $s = 18$.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (14)

Lösung 020734:

Wenn man die Konstruktion durchführt, stellt man fest, dass die Dreiecke ACE und BDE kongruent sind. Es gilt nämlich $BE = CE$ (E ist der Mittelpunkt von a), $AE = ED$ (Verlängerung von AE um sich selbst) und $\sphericalangle AEC = \sphericalangle DEB$ (Scheitelwinkel). Damit sind die beiden Dreiecke flächengleich; durch das Hinzunehmen der Fläche des Dreiecks ABE folgt $F_1 : F_2 = 1$.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (14)

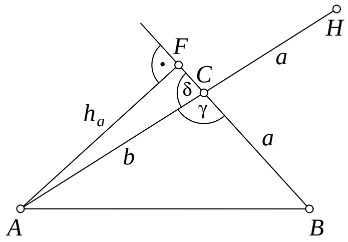
Lösung 020735:

Die Trapezinnenwinkel am gleichen Schenkel sind zusammen je 180°. Die Strecken von M zu den Eckpunkten sind die Winkelhalbierenden der Innenwinkel. Daher $\sphericalangle MDA + \sphericalangle DAM = (\alpha + \delta)/2 = 90°$. Nach dem

Innenwinkelsatz für das Dreieck AMD folgt, dass der gesuchte Winkel ebenfalls 90° groß ist. Ebenso gilt das Gesagte am anderen Schenkel des Trapezes.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (14)

Lösung 020736:



Zuerst überlegt man sich, dass die Höhe h_a außerhalb des gesuchten Dreiecks liegen muss, weil es stumpfwinklig ist. Dann legt man eine Gerade (auf der später die Seite a liegt) und auf ihr den Punkt F beliebig fest. In F errichtet man eine Senkrechte, auf der man h_a abträgt; ihr Endpunkt wird A.

Nun kann man nutzen, daß man den Winkel γ kennt: Man kennt gleichzeitig δ (gestreckter Winkel: $\gamma + \delta = 180°$) und $\sphericalangle FAC$ (nach Innenwinkelsatz). In A konstruiert man an AF einen Winkel von 10°, auf dem erhaltenen Schenkel trägt man $s = a + b$ ab; der Endpunkt sei H und der Schnittpunkt mit der ersten Geraden sei C.

Damit hat man aus den gegeben Stücken das Hilfsdreieck ACF erhalten, dessen Eckpunkt C die Seitensumme s in $b = AC$ und $a = CH$ teilt. Die Strecke CH überträgt man dann auf die Gerade, auf der die Seite a liegen muss; es entsteht der Punkt B. Damit kennt man das gesuchte Dreieck.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.