2. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Saison 1962/1963

Aufgaben und Lösungen

2. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 020811:
Kann die Summe von drei beliebigen, aber aufeinanderfolgenden natürlichen (positiven ganzen) Zahlen eine Primzahl sein? Die Antwort ist zu begründen!

Aufgabe 020812:
Für den Zusammenbau von 1 000 kompletten Schalterteilen für elektrische Geräte benötigte im VEB Elektro-Apparate-Werk Berlin-Treptow ein Arbeiter bisher $27\,\frac{1}{2}$ Stunden. In einem Schülerwettbewerb unterbreitete ein Schüler einen Verbesserungsvorschlag, durch den diese Zeit auf $16\,\frac{1}{2}$ Stunden verringert werden konnte.

a) Um wieviel Prozent verringerte sich die Arbeitszeit?

b) Um wieviel Prozent erhöhte sich dabei die Arbeitsproduktivität?

Anmerkung: Unter der Arbeitsproduktivität versteht man in diesem Falle den Quotienten aus der Anzahl der Schalterteile und der für ihre Herstellung benötigten Arbeitszeit.

Aufgabe 020813:
Im Berliner Stadtzentrum wird das neue Hotel Berolina gebaut. Es ist an der Vorderfront mit 286 Außenwandplatten verkleidet. Für jedes der zehn Obergeschosse werden 26 nebeneinanderliegende Platten benötigt. Die beiden äußeren Platten haben eine Fläche von je $6{,}73\,\text{m}^2$, alle anderen 24 Platten eines Geschosses eine Fläche von je $6{,}37\,\text{m}^2$. Die Plattenhöhe beträgt 2,74 m. Den oberen Abschluß der Fassade bilden als Verkleidung des Dachgeschosses ebenfalls 26 Platten. Von diesen Platten haben die äußeren eine Fläche von je $3{,}73\,\text{m}^2$. Die Höhe aller dieser Platten beträgt 1,52 m.

Es sind zu berechnen:

a) die Höhe der Fassade,

b) die Länge der Fassade!

Anmerkung: Zwischen je zwei Platten verbleibt stets eine Fuge von 5 cm Breite. Zur Höhe ist außerdem noch die der Empfangshalle mit 10 m hinzuzufügen.

Aufgabe 020814:

Bei der folgenden Divisionsaufgabe sind die fehlenden Ziffern zu ergänzen! Wie wurden die Ziffern ermittelt? (Begründung!)

```
* * * * * * * * *  : ? = * * * * 8 * *
* * *
-----
  * * *
  * * *
  -----
    * * *
    * * *
    -----
        * *
        * *
        ---
          * * *
          * * *
          -----
              0
```

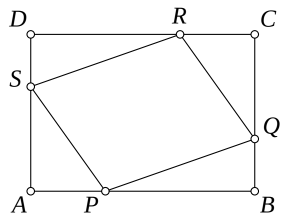
Aufgabe 020815:

Beweise folgenden Satz:

Liegt der Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks auf einer seiner Seiten, so ist das Dreieck rechtwinklig!

Aufgabe 020816:

Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$, dessen Seiten wie in der Abbildung sämtlich im Verhältnis 1 : 2 geteilt seien. Wir nennen die Teilpunkte P, Q, R, S und verbinden sie fortlaufend miteinander.



a) Führe diese Konstruktion für das Rechteck mit den Seiten $AB = 10$ cm und $BC = 7$ cm durch!

b) Was für ein Viereck ist das Viereck $PQRS$? (Beweis!)

c) Wie verhält sich der Flächeninhalt des Vierecks $PQRS$ zu dem des Rechtecks $ABCD$? Gilt das Ergebnis auch für andere derartig geteilte Rechtecke? (Begründung!)

2. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 020811:

Die Summe von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3$. Sie ist also durch 3 teilbar, aber verschieden von 3 wegen $n \geq 1$. Damit ist die Summe keine Primzahl.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 020812:

Die Arbeitszeit verringerte sich um $11 : 27\frac{1}{2} \cdot 100\% = 40\%$. Die Produktivität betrug vorher $36\frac{4}{11}\ \mathrm{h}^{-1}$, jetzt liegt sie bei $60\frac{20}{33}\ \mathrm{h}^{-1}$. Sie ist also um $66\frac{2}{3}\%$ gestiegen.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 020813:

Die Fassade ist $10\ \mathrm{m} + 10 \cdot 2{,}74\ \mathrm{m} + 1{,}52\ \mathrm{m} + 10 \cdot 0{,}05\ \mathrm{m} = 39{,}42\ \mathrm{m}$ hoch. Ihre Länge beträgt $2 \cdot (6{,}73 : 2{,}74)\ \mathrm{m} + 24 \cdot (6{,}37 : 2{,}74)\ \mathrm{m} + 25 \cdot 0{,}05\ \mathrm{m} \approx 61{,}85\ \mathrm{m}$.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 020814:

Die einzige Ziffer, über die wir am Anfang verfügen, ist die 8. Man sieht, dass ihr Produkt mit dem Divisor zweistellig ist, also kann der Divisor nicht größer als 12 sein.

Da der Quotient aber zwei Stellen weniger hat als der Dividend, muss der Divisor wenigstens 11 sein. Da aber das Produkt der Einerstelle des Quotienten mit dem Divisor dreistellig ist, bleibt nur die 12 übrig – gleichzeitig muss die Einerstelle selbst 9 und die Zehnerstelle 0 sein. Das ist in der ersten Abbildung zu sehen.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
* & * & * & * & * & * & * & 0 & 8 & : & 12 & = & * & * & * & * & 8 & 0 & 9 \\
* & * & * & & & & & & & & & & & & & & & & \\
\cline{1-3}
 & & * & * & * & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & * & * & * & & & & & & & & & & & & & & \\
\cline{3-5}
 & & & * & * & * & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & * & * & * & & & & & & & & & & & & & \\
\cline{4-6}
 & & & & & * & * & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & 9 & 6 & & & & & & & & & & & & \\
\cline{6-7}
 & & & & & & 1 & 0 & 8 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & 0 & 8 & & & & & & & & & & \\
\cline{7-9}
 & & & & & & & & 0 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Dann addiert man nach oben, bekommt eine 97 in der fünften Zeile von unten, die 7 überträgt man in die

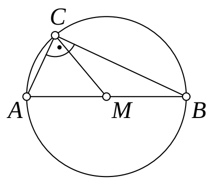
Hunderterstelle des Dividenden. Die nächsthöhere Zeile ist wieder dreistellig, also 108. Also wieder nach oben addieren, die nächste Zeile ist wieder 108, u.s.w.

Die Aufgabe lautet also 109 197 708 : 12 = 9 099 809.

```
∗ ∗ ∗ ∗ ∗ 7 7 0 8  :  12  =  ∗ ∗ ∗ 9 8 0 9
∗ ∗ ∗
-----
    ∗ ∗ ∗
    1 0 8
    -----
      1 1 7
      1 0 8
      -----
          9 7
          9 6
          ---
            1 0 8
            1 0 8
            -----
                0
```

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 020815:



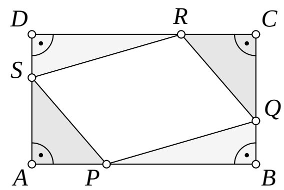
Der Umkreismittelpunkt hat zu den drei Eckpunkten des Dreiecks den gleichen Abstand. Daher ist er – wenn er auf einer der Seiten liegt – Mittelpunkt dieser Seite; umgekehrt ist diese Seite dann Durchmesser des Kreises.

Der Winkel am verbleibenden Eckpunkt ist dann nach dem Satz des Thales ein rechter Winkel.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 020816:

a) Siehe nebenstehendes Bild (nicht maßstabsgerecht).



b) *Behauptung:* $PQRS$ ist ein Parallelogramm.

Beweis: Wegen $AB = CD$, $BC = DA$ und gleicher Teilungsverhältnisse auf den Seiten gilt $AS = CQ$, $AP = CR$, $BP = DR$ sowie $BQ = DS$. Nach Kongruenzsatz SWS ist $\triangle APS \cong \triangle CRQ$ und $\triangle BQP \cong \triangle DSR$. Also ist $PQ = RS$, $QR = SP$ und somit $PQRS$ ein Parallelogramm. $\square$

c) Mit $a \equiv AB = CD$ und $b \equiv BC = DA$ ist $[APS] = [CRQ] = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{2b}{3} = \frac{1}{9}ab$ sowie $[BQP] = [DSR] = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{2a}{3} = \frac{1}{9}ab$, mithin

$$[PQRS] = [ABCD] - ([APS] + [CRQ] + [BQP] + [DSR]) = ab - \frac{4}{9}ab = \frac{5}{9}ab.$$

Das Verhältnis der Flächeninhalte beträgt somit stets $\frac{5}{9}$, unabhängig von den konkreten Abmessungen des Rechtecks.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Quellenverzeichnis

(15) "a+b = b+a" - Heft 66, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 8 - Dokumentation I.-XVIII. Olympiade (1961-1979), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1979.