2. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Saison 1962/1963

Aufgaben und Lösungen

2. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 020821:

Zu beweisen ist folgender Satz:

Wenn sich der Bruch $\frac{a-b}{a+b}$ nicht kürzen läßt, dann ist stets auch $\frac{a}{b}$ unkürzbar.

Aufgabe 020822:

Nach den Plänen, die auf dem XXII. Parteitag der KPdSU ausgearbeitet wurden, soll die Kohleförderung 1980 um 687 Millionen t höher liegen als im Jahre 1960. Die Kohleförderung im Jahre 1980 beträgt 234 Prozent im Vergleich zum Jahre 1960.

Berechne die geplante Kohleförderung des Jahres 1960! Runde auf volle Millionen t!

Aufgabe 020823:

Berechne:

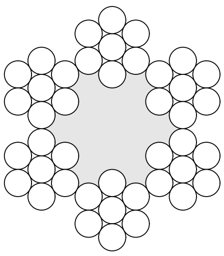
$$\frac{m^2-n^2}{m-n}+\frac{m^2+2mn+n^2}{m+n}.$$

Aufgabe 020824:

Welche x erfüllen die folgende Gleichung:

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3x}{4}-\frac{1}{6}\right):\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\right)?$$

Aufgabe 020825:



Drahtseile bestehen häufig aus Litzen, die wieder aus einzelnen Stahldrähten bestehen. Die Litzen sind um eine gefettete Hanfseele geschlagen, die das Seil von innen her schmiert. Die Abbildung zeigt den Querschnitt durch ein solches Drahtseil, das aus 42 Drähten und einer (grau gefärbten) Hanfseele besteht. Jeder Draht hat einen Durchmesser von 1 mm.

Wie groß ist der Durchmesser des dem Seilquerschnitt umbeschriebenen Kreises? Begründung!

Aufgabe 020826:

Klaus fährt mit seinem Moped mit gleichbleibender Geschwindigkeit eine Straße entlang und passiert dabei zu Anfang einen Kilometerstein mit einer zweistelligen Zahl vor dem Komma. Nach genau $1\frac{1}{2}$ Stunden kommt er wiederum an einem Kilometerstein vorbei, auf dem vor dem Komma die gleichen Ziffern, jedoch in umgekehrter Reihenfolge stehen. Nach weiteren $1\frac{1}{2}$ Stunden ist er am Ziel und erblickt einen Kilometerstein, dessen dreistellige Zahl vor dem Komma aus den beiden Ziffern des ersten Steines, zwischen denen sich eine Null befindet, besteht. Hinter dem Komma stand in allen drei Fällen die gleiche Ziffer.

a) Welche Strecke legte Klaus zurück?

b) Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit fuhr er?

Aufgabe 020827:

Von einem Dreieck sind die Summe zweier Seiten und zwei Winkel gegeben:

$$a + b = 10\text{ cm}, \qquad \beta = 45°, \qquad \gamma = 60°.$$

Konstruiere das Dreieck! Beschreibe und begründe die Konstruktion!

Aufgabe 020828:

Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $AB = 10\text{ cm}$! Der Fußpunkt der Höhe h_c soll die Hypotenuse in zwei Abschnitte teilen, die sich wie $2 : 3$ verhalten.

Bestimme aus der Konstruktion die Länge von h_c! Beschreibe die Konstruktion!

Aufgabe 020829:

Folgende Behauptung ist zu beweisen:

Die Mittelpunkte der Quadrate, die über den Seiten eines beliebigen Parallelogramms so errichtet worden sind, daß die Quadrate außerhalb des Parallelogramms liegen, bilden fortlaufend miteinander verbunden ein Quadrat.

(Hier genügt es nicht, nur die Zeichnung anzufertigen, das ist kein Beweis! Es müssen die Eigenschaften eines Quadrates nachgewiesen werden. Die Eigenschaften sind: alle Seiten sind gleich lang, alle Winkel sind 90° groß.)

2. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 020821:

Man kann diesen Satz *indirekt* beweisen. Das bedeutet, dass man die äquivalente Umkehraussage beweist, also: Wenn $\frac{a}{b}$ kürzbar ist, dann ist auch $\frac{a-b}{a+b}$ kürzbar.

Die Voraussetzung bedeutet, dass a und b einen gemeinsamen Teiler haben, dieser sei m. Damit gilt $a = ma'$ und $b = mb'$, weiterhin

$$\frac{a}{b} = \frac{ma'}{mb'} = \frac{a'}{b'}.$$

Setzt man das in den Term der Behauptung ein, sieht man, dass er tatsächlich kürzbar ist:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{ma'-mb'}{ma'+mb'} = \frac{m(a'-b')}{m(a'+b')} = \frac{a'-b'}{a'+b'}. \quad \square$$

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 020822:

Es gilt, den Grundwert x zum Prozentwert 687 Millionen t, der 134 Prozent (mehr als 1960, wo es 100 Prozent waren) entspricht, zu berechnen. Also lautet die Beziehung $x : 687$ Millionen t $= 100 : 134$.

Daraus erhält man 513 Millionen t geförderte Kohle im Jahr 1960.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 020823:

$$\begin{aligned} \frac{m^2-n^2}{m-n} + \frac{m^2+2mn+n^2}{m+n} &= \frac{(m+n)(m-n)}{m-n} + \frac{(m+n)^2}{m+n} = m+n+m+n \\ &= 2\,(m+n) \end{aligned}$$

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 020824:

$$\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{3x}{4} - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{2}{9} = \frac{x^2}{4} - \frac{31x}{72} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{5}{72}x = \frac{5}{36}$$

Also ist $x = 2$, wovon man sich in der Probe noch einmal überzeugt.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 020825:

Eine wesentliche Eigenschaft von Kreisen ist, dass man sie in regelmäßige Sechsecke einbeschreiben kann, bei denen der Abstand gegenüberliegender Seiten gleich dem Kreisdurchmesser ist. Demzufolge kann man den grau gefärbten Innenbereich mit diesen Sechsecken „parkettieren"; der Rest ist dann eine Abzählaufgabe.

Der Durchmesser des Umkreises wird von 9 aneinanderliegenden Kugeln gebildet, er ist also 9 mm.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 020826:

Die Abschnitte zwischen dem ersten und zweiten bzw. zweiten und dritten Kilometerstein müssen gleich sein. Sei die Zahl auf dem ersten $10a + b$, auf dem zweiten $10b + a$ und auf dem dritten $100a + b$ mit $1 \leq a, b \leq 9$. Dann gilt $(10b + a) - (10a + b) = (100a + b) - (10b + a)$ oder umgeformt $108a = 18b$ oder $6a = b$.

Im vorgegebenen Bereich wird das bloß von $a = 1,\ b = 6$ erfüllt. Also stand auf den Kilometersteinen 16, 61 und 106 – Klaus legte also 90 km zurück. Da er 3 h gebraucht hat, war seine durchschnittliche Geschwindigkeit 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 020827:

Man konstruiere zuerst ein beliebiges Dreieck $A'B'C$ mit den angebenen Winkeln; dieses ist dem gesuchten dann ähnlich.

Dann verlängere man die Seite b' über den Punkt A' hinaus um die Seite a'; man erhält den Punkt D.

Nunmehr kann man eine Gerade durch C zeichnen, auf der man $a + b$ abtrage, der entstandene Endpunkt sei E. Zu beachten ist, dass CD und CE einen spitzen Winkel miteinander bilden. Die Parallele zu DE durch A' teilt (Strahlensatzkonstruktion!) $CE = a + b$ genau in a (Endpunkt E) und b (bei C).

Diese Seiten kann man in C antragen, womit man das Dreieck ABC bekommt.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 020828:

Man zeichne die Strecke AB. Diese teile man, z.B. per Strahlensatzkonstruktion, im Verhältnis $2 : 3$. Im Teilungspunkt errichte man die Senkrechte, auf der die Höhe h_c liegt.

Den anderen Endpunkt der Höhe erhält man nach dem Satz des Thales: konstruiert werden muss der Kreis mit AB als Durchmesser. Sein Schnittpunkt mit der errichteten Senkrechten ist der gesuchte Punkt C des Dreiecks. Damit kann man feststellen, dass die Länge von $h_c \approx 4{,}9$ cm beträgt.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 020829:

Man bezeichne die Mittelpunkte über den Seiten a, b, c und d in dieser Reihenfolge mit M_a, M_b, M_c und M_d. Dann kann man die Kongruenz von z.B. Dreieck AM_aM_d und BM_aM_b zeigen.

Es gilt

$AM_a = BM_a$ (halbe Diagonalen im gleichen Quadrat),

$AM_d = BM_b$ (halbe Diagonalen in kongruenten Quadraten, da gegenüberliegende Parallelogrammseiten gleich lang sind) und

$\sphericalangle M_aAM_d = \sphericalangle M_aBM_b$.

Letzteres sieht man, indem man diese Winkel durch Teilwinkel ausdrückt, d.h. $\sphericalangle M_aAM_d = 2 \cdot 45° + \sphericalangle DAC$ und $\sphericalangle M_aBM_b = 2 \cdot 45° + (90° - \sphericalangle ABC)$. Da aber im Parallelogramm benachbarte Winkel zusammen 90° groß sind, sind letztere Ausdrücke gleich.

Aus der bewiesenen Kongruenz folgt $M_aM_d = M_aM_b$ und $\sphericalangle AM_aM_d = \sphericalangle BM_aM_b$.

Mit der zweiten Aussage gilt $\sphericalangle M_dM_aM_b = \sphericalangle AM_aB = 90°$.

Da man diesen Beweis analog für alle anderen Seitenpaare und Winkel des Vierecks $M_aM_bM_cM_d$ durchführen kann, sind alle Seiten gleich und Winkel 90° groß. $\square$

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Quellenverzeichnis

(15) "a+b = b+a" - Heft 66, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 8 - Dokumentation I.-XVIII. Olympiade (1961-1979), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1979.