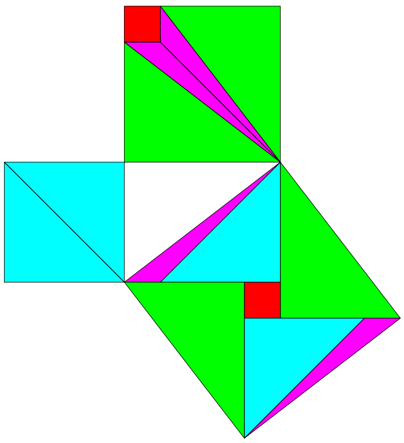
2. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Saison 1962/1963

Aufgaben und Lösungen



2. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 021021:

Die in einem Stadtbezirk geleiteten Industriebetriebe erfüllten im I. Quartal 1962 den Plan der Bruttoproduktion gegenüber dem gleichen Zeitraum des Vorjahres mit 112,4 %. Insgesamt wurden für 4,7 Millionen DM mehr Waren produziert. Der Volkswirtschaftsplan wurde gleichzeitig um 5,6 % übererfüllt.

Wie hoch war die im Volkswirtschaftsplan vorgesehene Bruttoproduktion des I. Quartals 1962?

Aufgabe 021022:

In einem Steinkohlenwerk soll für einen 800 m tiefen Schacht eine Förderanlage gebaut werden. Es sollen Lasten bis zu 12 Mp gefördert werden. Das Förderseil besteht aus Stahldrähten und verträgt unter Berücksichtigung der notwendigen Sicherung eine Belastung von 20 kp je mm^2 Querschnitt.

Wie groß muß der metallische Querschnitt des Seils sein, damit es sowohl die eigene Last als auch die zu fördernde Last tragen kann? (Wichte des Stahls $\gamma = 7{,}8\ \mathrm{p/cm}^3$)

Aufgabe 021023:

Beweisen Sie, daß für alle natürlichen Zahlen m die Zahl

$$n = \frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6}$$

immer eine natürliche Zahl ist!

Aufgabe 021024:

Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC. Verlängern Sie $\overline{AC}$ über C hinaus bis zu einem beliebigen Punkt E. Konstruieren Sie über $\overline{CE}$ das gleichseitige Dreieck CDE (die Punkte sollen in mathematisch positivem Drehsinn in dieser Reihenfolge liegen)! Verbinden Sie A mit D und B mit E und halbieren Sie die beiden Strecken! Ihre Mittelpunkte seien M und N.

Beweisen Sie, daß das Dreieck CMN stets gleichseitig ist!

Aufgabe 021025:

Gegeben sei eine beliebige mehrstellige natürliche Zahl. Man bilde durch eine beliebige Umstellung ihrer Ziffern daraus eine zweite Zahl.

Beweisen Sie, daß die Differenz dieser beiden Zahlen stets durch 9 teilbar ist!

2. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 021021:

Im I. Quartal 1961 wurden Waren im Wert von

$$\frac{4,7\text{ Mio. DM}}{12,4\%} = \frac{4,7\text{ Mio. DM}}{0,124} \approx 38\text{ Mio. DM}$$

produziert. Im I. Quartal 1962 waren es demnach Waren im Wert von $38\text{ Mio. DM} \cdot 1,124 \approx 42,7\text{ Mio. DM}$. Das entspricht 105.6% des Volkswirtschaftsplans.

Vorgesehen waren also $42,7\text{ Mio. DM}/1,056 \approx 40\text{ Mio. DM}$.

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka

Lösung 021022:

Das Seil muß das Gewicht von 12 Mp, sowie das Eigengewicht fördern. Das Eigengewicht ergibt sich als $V \cdot \gamma = 800\text{ m} \cdot x \cdot 7,8\text{ p/cm}^3 = x \cdot 624\text{ kp/cm}^2$. Dabei ist x der Querschnitt des Seils in cm^3. Das Seil fördert $2\,000\text{ kp/cm}^2$ Querschnitt. Damit benötigt das Seil einen Querschnitt von

$$x = \frac{12\,000\text{ kp}}{2\,000\text{ kp/cm}^2 - 624\text{ kp/cm}^2} \approx 8,721\text{ cm}^2.$$

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka

Lösung 021023:

$$\frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6} = \frac{2m + 3m^2 + m^3}{6} = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}$$

Von drei aufeinander folgenden Zahlen ist immer genau eine durch 3 und mindestens eine durch 2 teilbar. Damit ist das Produkt der drei Zahlen auf jeden Fall durch 6 teilbar.

Alternativ:
Der Term

$$\frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6} = \frac{2m + 3m^2 + m^3}{6}$$

ergibt genau dann eine natürliche Zahl, wenn $2m + 3m^2 + m^3$ ohne Rest durch 6 teilbar ist. Dafür muß $2m + 3m^2 + m^3$ durch 2 und durch 3 teilbar sein.
Wenn m selber durch 2 teilbar ist, so ist die Summe selbstverständlich auch durch 2 teilbar. Wenn $m = 2k+1$ eine ungerade Zahl ist, ist

$$2(2k+1) + 3(2k+1)^2 + (2k+1)^3 = 8k^3 + 24k^2 + 22k + 6$$

ebenfalls durch 2 teilbar. Nun bleibt noch die Teilbarkeit durch 3 zu überprüfen. Wenn m durch 3 teilbar ist, dann sicher auch $2m + 3m^2 + m^3$. Wenn m bei Division durch 3 den Rest 1 läßt, so ist

$$2(3k + 1) + 3(3k + 1)^2 + (3k + 1)^3 = 27k^3 + 54k^2 + 33k + 6$$

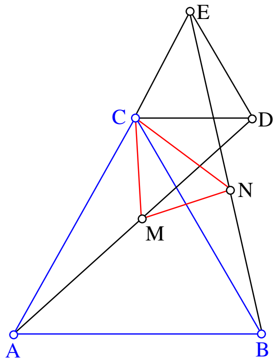
auch durch 3 teilbar. Sei nun als letzte Möglichkeit $m = 3k + 2$, dann ist

$$2(3k + 2) + 3(3k + 2)^2 + (3k + 2)^3 = 27k^3 + 81k^2 + 78k + 24$$

ebenfalls ein Vielfaches von 3. Demnach ist in jedem Fall $2m + 3m^2 + m^3$ durch 6 teilbar.

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka

Lösung 021024:



Da der Winkel $\sphericalangle ECD$=60° ist, muß $\sphericalangle DCA$=120° sein.

Genauso ist $\sphericalangle BCA$=60° und deshalb $\sphericalangle ECB$= 120°.

Die beiden Dreiecke ΔDCA und ΔECB sind deswegen nach Kongruenzsatz SWS kongruent. Die beiden Seitenhalbierenden $\overline{CN}$ und $\overline{CM}$ sind dann gleichlang und das Dreieck ΔCMN ist gleichschenklig.

Rotiert man das Dreieck ΔCAD um den Punkt C um 60° nach links, so bildet man es genau auf das Dreieck ΔCBE ab. Dabei wird auch M auf N abgebildet. Die beiden Punkte müssen bezüglich C einen Winkel von 60° haben, womit unter Beachtung der Gleichschenkligkeit gezeigt ist, daß ΔCMN gleichseitig ist. □

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka

Lösung 021025:

Eine Zahl läßt bei Division durch 9 den gleichen Rest wie ihre Quersumme. Das liegt daran, daß jede 10er Potenz bei Division durch 9 den Rest 1 läßt.

Beim Umstellen der Ziffern ändert sich die Quersumme der Zahl nicht, weswegen die gegebene Zahl und die umgestellte Zahl den gleichen Rest bei Division durch 9 lassen.

Ihre Differenz ist deswegen durch 9 teilbar. □

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka