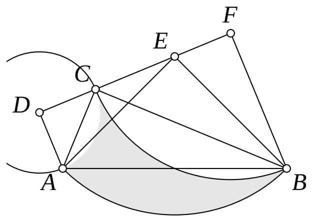
2. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Saison 1962/1963

Aufgaben und Lösungen

2. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 021031:



Vergleichen Sie die Flächeninhalte der grauen Fläche und des rechtwinkligen Dreiecks ABC!

(Die Dreiecke $\triangle ACD, \triangle ABE$ und $\triangle CBF$ sind rechtwinklig-gleichschenklig; D, E und F sind die Mittelpunkte der Kreise.)

Aufgabe 021032:

Berechnen Sie:

$$\log_2 \frac{1}{256} + \log_2 \frac{1}{128} + \log_2 \frac{1}{64} + \log_2 \frac{1}{32} + \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 1 + \log_2 2 + \dots + \log_2 64 + \log_2 128.$$

Aufgabe 021033:

Es ist eine dreistellige Zahl zu finden, die folgende Eigenschaften hat:

a) Die Zahl ist durch 9 und 11 teilbar.

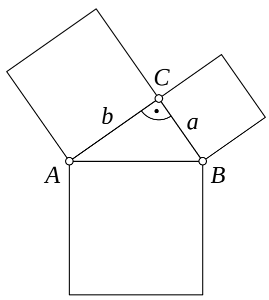
b) Vertauscht man die erste und die letzte Ziffer, so erhält man $\frac{2}{9}$ der ursprünglichen Zahl.

Wie viele Lösungen gibt es?

Aufgabe 021034:

Aus der Figur zum pythagoreischen Lehrsatz mache man durch Verbinden der äußeren Eckpunkte ein Sechseck.

Sein Flächeninhalt soll durch die beiden Katheten a und b ausgedrückt werden!



Aufgabe 021035:

Beweisen Sie, daß die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen stets durch 9 teilbar ist!

Aufgabe 021036:

Für die Berechnung des Gesamtwiderstandes R_g bei parallel geschalteten Widerständen R_1 und R_2 gilt die Beziehung:

$$\frac{1}{R_\mathrm{g}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Diese Aufgabe kann man durch folgende einfache Konstruktion lösen: Auf einer beliebigen Geraden g werden in den Punkten A und C (beliebiger Abstand) die Senkrechten AB und CD errichtet, wobei AB und CD in einem geeigneten Maßstab die Widerstände R_1 und R_2 darstellen sollen. Verbindet man A mit D und B mit C, so schneiden sich diese Verbindungslinien in E. Fällt man von E aus das Lot auf die Gerade (Fußpunkt sei F), dann wird behauptet, daß EF die Größe des gesuchten Widerstandes R_g angibt.

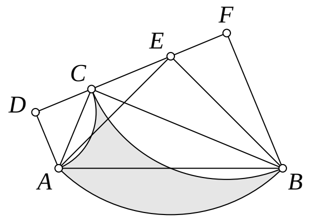
a) Beweisen Sie die Richtigkeit der Konstruktion!

b) Wie bestimmen Sie graphisch den Gesamtwiderstand, wenn drei Widerstände von $8\,\Omega$, $10\,\Omega$, $12\,\Omega$ parallel geschaltet werden?

2. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 021031:



Die graue Fläche besteht aus dem rechtwinkligen Dreieck ABC, erweitert um den Kreisabschnitt AB und vermindert um die Kreisabschnitte AC und BC.

Man berechne die Fläche eines dieser Abschnitte, hier die Fläche S_{AB} zwischen der Strecke AB und dem Bogen AB.

Sie ist gleich der Differenz aus dem Viertelkreis mit Mittelpunkt E und Radius AE und dem Dreieck ABE, also

$$S_{AB} = \frac{1}{4}\pi AE^2 - \frac{1}{2}AE^2 = \frac{AB^2}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{1}{4}(AC^2 + BC^2)\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

Das zweite Gleichheitszeichen gilt wegen $AB = AE\sqrt{2}$ im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck.

Der letzte Schritt nutzt den Satz des Pythagoras: diese beiden Summanden haben die gleiche Form wie der für S_{AB}, sie sind die anderen beiden Kreisabschnitte S_{AC} und S_{BC}.

Damit haben wir $S_{AB} = S_{AC} + S_{BC}$, d.h. die hinzugefügte Fläche ist genauso groß wie die abgeschnittenen Flächen. Also sind das Bogendreieck und das Geradendreieck ABC flächengleich.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 021032:

Da $\log_2 \frac{1}{x} = -\log_2 x$ gilt und $\log_2 1 = 0$ ist, ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\log_2 \frac{1}{256} + \log_2 \frac{1}{128} + \log_2 \frac{1}{64} + \log_2 \frac{1}{32} + \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 1 + \log_2 2 + \cdots + \log_2 64 + \log_2 128 \\
&= \log_2 \frac{1}{256} + \log_2 \frac{1}{128} + \log_2 128 + \log_2 \frac{1}{64} + \log_2 64 + \cdots + \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 2 + \log_2 1 \\
&= \log_2 \frac{1}{256} - \log_2 128 + \log_2 128 - \log_2 64 + \log_2 64 + \cdots - \log_2 2 + \log_2 2 + \log_2 1 \\
&= \log_2 \frac{1}{256} + \log_2 1 \\
&= -\log_2 256 + 0 \\
&= -\log_2 2^8 = -8
\end{aligned}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka

Lösung 021033:

Die gesucht Zahl muß durch 11 und durch 9 teilbar sein. Wegen letzterem ist auch die Quersumme durch 9 teilbar.

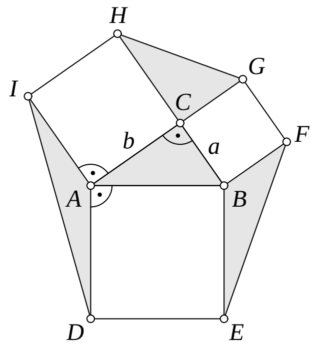
Beim Umstellen der Ziffern ändert sich die Quersumme der Zahl nicht. Die neu gebildete ist also auch durch 9 teilbar.

Da sie durch Multiplikation mit $\frac{2}{9}$ aus der ursprünglichen Zahl erhalten wurde, muß die anfängliche Zahl zweimal durch 9 teilbar sein. Die gesuchte Zahl ist also nicht nur durch $11 \cdot 9$ sondern sogar durch $11 \cdot 9 \cdot 9$ teilbar.

Die einzige dreistellige Zahl, die diese Bedingung erfüllt ist 891. Sie ist zugleich die einzige Lösung der Aufgabe.

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka

Lösung 021034:



Nennen wir die Eckpunkte des Sechsecks D, E, F, G, H und I. Dann setzt sich der Flächeninhalt des Sechsecks zusammen aus vier Dreiecken und drei Quadraten:

$$A_{DEFGHI} = A_{ABC} + A_{ADEB} + A_{BFGC} + A_{CHIA} + A_{AID} + A_{BEF} + A_{CGH}$$

Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras folgt nun:

$$A_{ABC} = \frac{ab}{2},\quad A_{ADEB} = a^2 + b^2,\quad A_{BFGC} = a^2\quad A_{CHIA} = b^2.$$

Verbleiben noch die äußeren schraffierten Dreiecksflächen. Doch diese sind alle untereinander gleich der Fläche des Dreiecks ABC.

Um das einzusehen, vergleichen wir z. B. die Dreiecke AID und ABC. Beide haben paarweise gleiche Seiten $AI = AC = b$ und $AD = AB = c$, die jeweils Supplementwinkel einschließen: $\sphericalangle IAD = 180° - \sphericalangle CAB$. Wegen $\sin(\sphericalangle IAD) = \sin(180° - \sphericalangle CAB) = \sin \sphericalangle CAB$ und der bekannten Formel $\frac{bc}{2} \sin \alpha$ für den Flächeninhalt eines Dreiecks ist also tatsächlich $A_{AID} = A_{ABC} = \frac{ab}{2}$.

Dasselbe gilt für A_{BEF} und A_{CGH}.

Alle Flächeninhalte aufaddiert ergibt schließlich $A_{DEFGHI} = 2\,(a^2 + ab + b^2)$.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 021035:

eien $n-1$, n und $n+1$ die drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen. Dann ist

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = 3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2).$$

Wenn n durch 3 teilbar ist, ist der Faktor $3n$ durch 9 teilbar und damit das ganze Produkt.

Wenn n bei Division durch 3 den Rest 1 läßt, also wenn $n = 3k + 1$ gilt, dann ist der zweite Faktor $n^2 + 2 = (3k+1)^2 + 2 = 9k^2 + 6k + 3$ durch 3 teilbar und mit der ersten 3 dann das ganze Produkt durch 9.

Bei der letzten Möglichkeit, Rest 2 bei Division durch 3 kann auch äquivalent genutzt werden, daß bei Division durch 3 der Rest -1 auftritt. Dann gilt $n = 3k - 1$ und für den zweiten Faktor analog $n^2 + 2 = (3k-1)^2 + 2 = 9k^2 - 6k + 3$. Damit ist der zweite Faktor durch 3 und das ganze Produkt durch 9 teilbar sind. □

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka

Lösung 021036:

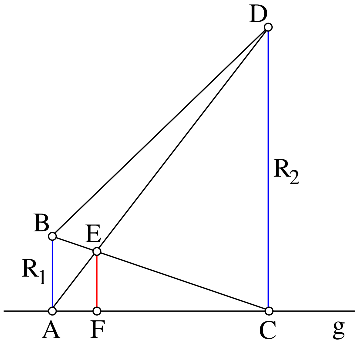
a) Mit den Strahlensätzen ergibt sich

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \qquad \text{und} \qquad \frac{\overline{CF}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\,.$$

Nach Addition und Division durch die Länge der Strecke $\overline{AC}$ erhält man

$$\frac{\overline{AF}+\overline{FC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} + \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{\overline{EF}} = \frac{1}{\overline{CD}} + \frac{1}{\overline{AB}}\,.$$

Die Strecke $\overline{EF}$ ist also tatsächlich der gesuchte Widerstand.



b) Zuerst konstruiert man den Gesamtwiderstand von 8 Ω und 10 Ω. Anschließend wiederholt man die Konstruktion mit dem eben ermittelten Widerstand und 12 Ω.

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka