2. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1962/1963

Aufgaben und Lösungen

2. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 021041:

Bestimmen Sie alle Paare $(x; y)$ der positiven ganzen Zahlen x und y, für die $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{50}$ ist!

Aufgabe 021042:

Beweisen Sie, daß für alle positiven geraden Zahlen n die Zahl $z = 3^n + 63$ stets durch 72 teilbar ist!

Aufgabe 021043:

Ein Kreisausschnitt mit einem Zentriwinkel von 60° wird durch eine Senkrechte zur Winkelhalbierenden so in zwei Teile geteilt, daß die Umfänge dieser zwei Teile gleich groß sind.

Welcher von den beiden Teilen hat den kleineren Flächeninhalt? (Beweis!)

Aufgabe 021044:

Es ist ein Rechteck zu konstruieren, das den gleichen Inhalt wie ein gegebenes Quadrat mit der Seite a hat und dessen Umfang doppelt so groß wie der des gegebenen Quadrats ist.

Wie viele Lösungen hat diese Aufgabe?

Aufgabe 021045:

Beweisen Sie, daß die Summe der Seitenhalbierenden eines Dreiecks kleiner als der Umfang des Dreiecks ist!

Aufgabe 021046:

Ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kante a soll durch eine Ebene so geschnitten werden, daß eine quadratische Schnittfigur entsteht.

a) Geben Sie die Lage der Schnittebene an!

b) Warum ist die Schnittfigur ein Quadrat?

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Quadrats!

2. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 021041:

Abschätzung nach unten: $x > 0$ und $y > 0$; Abschätzung nach oben: $\sqrt{x} = \sqrt{50} - \sqrt{y} < \sqrt{50}$, also $x < 50$; analog für y

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \sqrt{y} &= \sqrt{50} \\ \sqrt{x} &= \sqrt{50} - \sqrt{y} \\ x &= 50 + y - 2 \cdot \sqrt{50 \cdot y} \\ x &= 50 + y - 10 \cdot \sqrt{2 \cdot y} \end{aligned}$$

Damit muß $\sqrt{2y}$ ganzzahlig sein. Dies wird durch $y = 2 \cdot a^2$ mit $a \in N$ erreicht. In den obigen Grenzen bedeutet dies:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2 \cdot 1^2 = 2 \Rightarrow x_1 = 32; \\ y_2 &= 2 \cdot 2^2 = 8 \Rightarrow x_2 = 18; \\ y_3 &= 2 \cdot 3^2 = 18 \Rightarrow x_3 = 8; \\ y_4 &= 2 \cdot 4^2 = 32 \Rightarrow x_4 = 2. \end{aligned}$$

Die Probe bestätigt alle Lösungen.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 021042:

Primfaktorenzerlegung: $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Damit ist zu zeigen, daß z sowohl durch 8 als auch durch 9 teilbar sein muß.

(1) Teilbarkeit durch 9:

$z = 3^n + 63$ mit n gerade: $n = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$, $k > 0 \Rightarrow z = 3^{2k} + 63 = \left(3^2\right)^k + 63 = 9^k + 9 \cdot 7 = 9 \cdot (9^{k-1} + 7)$.

Da k positiv ist, folgt daraus $k - 1 \geq 0$, damit ist der Klammerausdruck $a := 9^{k-1} + 7 \geq 9^0 + 7 = 8 > 0$ und ganzzahlig. Es gilt also $z = 9 \cdot a$ mit $a > 0$, $a \in \mathbb{N}$, d.h. z ist durch 9 teilbar.

(2) Teilbarkeit durch 8:

Mittels Induktionsbeweis kann diese Teilbarkeit für den Term $a := 9^{k-1} + 7$ nachgewiesen werden.

Induktionsvoraussetzung: Es existiert ein $k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, für das gilt: $8 | 9^{k-1} + 7$.

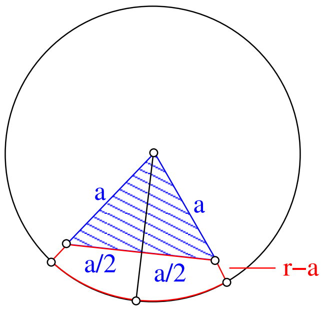
Induktionsbehauptung: $8 | 9^k + 7$

Induktionsschritt: Für $k = 1$ gilt: $a = 9^{k-1} + 7 = 8$ und $8 | 8$.

Induktionsbeweis: Es gilt $9^k + 7 = 9^{k-1} \cdot 9 + 7 = 9^{k-1} \cdot (8+1) + 7 = 8 \cdot 9^{k-1} + 9^{k-1} + 7$. Damit ist jeder der beiden Summanden $8 \cdot 9^{k-1}$ sowie $9^{k-1} + 7$ (wegen Induktionsvoraussetzung) durch 8 teilbar, folglich auch deren Summe. □

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 021043:



Durch die Senkrechte zur Winkelhalbierenden entsteht ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a. Dieses Dreieck hat den Umfang $3a$. Der Rest des Kreisausschnittes hat einen Umfang von $2(r-a) + a + 2\pi r/6$. Damit beide Umfänge gleich sind, muß $a = (2r + \frac{2\pi r}{6})/4 = \frac{r}{12}(\pi + 6)$ sein.

Das Dreieck hat einen Flächeninhalt von

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3} \cdot r^2 (\pi+6)^2}{4 \cdot 144}.$$

Für den zweiten Flächeninhalt gilt, daß er die Differenz zwischen dem gesamten Kreissegment abzüglich A_1 ist:

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{6} \cdot \pi r^2 - \frac{\sqrt{3} \cdot r^2 (\pi+6)^2}{4 \cdot 144} \\ &= \frac{r^2}{4 \cdot 144} \cdot \left(96\pi - \sqrt{3}(\pi+6)^2\right) \end{aligned}$$

Nun gilt $A_1 = A_2 + k$. Wenn $k > 0$, so ist $A_1 > A_2$, wenn $k = 0$, so ist $A_1 = A_2$ und wenn $k < 0$, so ist $A_1 < A_2$. Daher wird nun die Differenz ermittelt:

$$\begin{aligned} k &= A_1 - A_2 \\ &= \frac{r^2}{4 \cdot 144} \cdot \left(\sqrt{3} \cdot (\pi+6)^2 - 96\pi + \sqrt{3} \cdot (\pi+6)^2\right) \\ &= \frac{r^2}{2 \cdot 144} \cdot \left(\sqrt{3} \cdot (\pi+6)^2 - 48\pi\right) \end{aligned}$$

Abschätzung nach unten mit $\sqrt{3} < 1,8$ und $3,15 > \pi > 3,14$:

$$\begin{aligned} k &< \frac{r^2}{2 \cdot 144} \cdot \left(1,8 \cdot (3,15+6)^2 - 48 \cdot 3,14\right) \\ &< \frac{r^2}{2 \cdot 144} \cdot (1,7 \cdot 83,7225 - 150,72) \\ &< \frac{r^2}{2 \cdot 144} \cdot (150,7005 - 150,72) < -\frac{0,0195}{2 \cdot 144} \cdot r^2 < 0 \end{aligned}$$

Indem $k < 0$ gilt, ist der Flächeninhalt des Dreiecks kleiner als der des abgeschnittenen Kreissegments.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 021044:

Es gibt genau ein Rechteck, das diese Bedingungen erfüllt. Seien c und d die Rechteckseiten. Dann gilt

$$c \cdot d = a^2 \qquad \text{und} \qquad 2(c+d) = 2 \cdot 4a.$$

Aus der ersten Gleichung erhält man $c = a^2/d$. Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, kommt man zu

$$2(a^2/d + d) = 8a \qquad \text{und erhält} \qquad d^2 - 4ad + a^2 = 0.$$

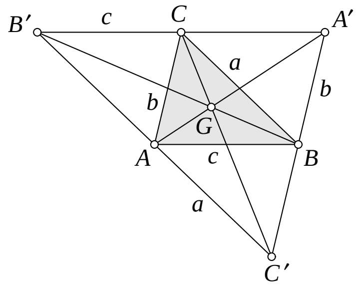
Die quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen

$$d_1 = (2+\sqrt{3})a \qquad \text{und} \qquad d_2 = (2-\sqrt{3})a.$$

Entsprechend kommen als Lösung ein Rechteck mit den Seitenlängen $(2+\sqrt{3})a$ und $a/(2+\sqrt{3})$ und ein Rechteck mit den Seitenlängen $(2-\sqrt{3})a$ und $a/(2-\sqrt{3})$ in Frage. Da aber $a/(2+\sqrt{3}) = a(2-\sqrt{3})$ ist und entsprechend $a/(2-\sqrt{3}) = a(2+\sqrt{3})$ ist, sind beide Rechtecke identisch. Es gibt also bis auf Kongruenz genau ein solches Rechteck.

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka

Lösung 021045:



Beweis: Der Schwerpunkt des Dreiecks, in dem sich bekanntlich die Seitenhalbierenden schneiden, sei G; die Seitenlängen seien wie üblich a, b und c. Wir ergänzen nun das Dreieck ABC zu einem Parallelogramm $ABA'C$.

Dieses hat die Diagonalenlängen $BC = a$ und $AA' = 2m_a$, letzteres, weil sich in Parallelogrammen die Diagonalen stets halbieren.

Jetzt können wir die Dreiecksungleichung auf das Dreieck ABA' anwenden: $b + c > 2m_a$.

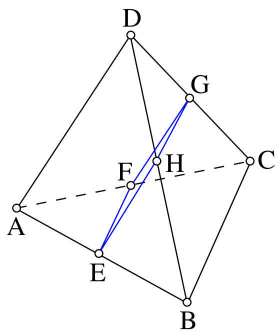
Analoge Ungleichungen erhalten wir, wenn wir die Parallelogramme $BCB'A$ und $CAC'B$ betrachten: $c+a > 2m_b$ bzw. $a + b > 2m_c$. Eine Addition dieser drei Ungleichungen liefert die Behauptung $m_a + m_b + m_c < a + b + c$. $\square$

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 021046:

a) A, B, C, D seien die Ecken des regelmäßigen Tetraeders, und E sei der Mittelpunkt der Kante $AB = a$.

   Eine der gesuchten Schnittebenen, die den Tetraeder so schneidet das eine quadratische Schnittfigur entsteht, ist die Ebene ε, die durch den Punkt E geht und parallel zu den Kanten AD und BC verläuft.



b) Die unter a) beschriebene Ebene ε schneide die Kanten AC, CD und BD in dieser Reihenfolge in den Punkten F, G und H.

   Dann gilt $EF \parallel BC$ und $GH \parallel BC$ und somit $EF \parallel GH$, sowie $FG \parallel AD$ und $HE \parallel AD$ und somit $FG \parallel HE$.

   Hieraus folgt nach dem Strahlensatz

$$EF = FG = GH = HE = BH = HD = CG = GD = CF = AF = \frac{a}{2}.$$

   Die Schnittfigur $EFGH$ ist demnach ein Rhombus und die Punkte F, G, H sind in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Kanten AC, CD, BD.

   Da die vier Seitenflächen des Tetraeders $ABCD$ gleichseitige Dreiecke sind und E der Mittelpunkt von AB ist, gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$CE = DE = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

   Damit ist das Dreieck ΔCDE gleichschenklig. Da G der Mittelpunkt von CD ist, ist er auch der Fußpunkt des Lotes von E auf DC. Damit ist EG die Höhe auf die Basislänge des gleichschenkligen Dreiecks ΔCDE.

   Nach dem Satz des Pythagoras gilt dann:

$$EG^2 = DE^2 - DG^2 = \frac{3\,a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2} \quad \text{bzw.} \quad EG = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

Da die Strecken EH, HG und EG der Beziehung

$$EG^2 = EH^2 + HG^2 \left(\frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \right)$$

genügen ist nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras das Dreieck ΔEGH rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei H.

Wegen $\sphericalangle EHG = 90°$ ist der Rhombus $EFGH$ ein Quadrat.

c) Für den Flächeninhalt A des Quadrates $EFGH$ gilt:

$$A = |EF| \cdot |EH| = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}.$$

Aufgeschrieben und gelöst von Manfred Worel