2. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 11
Saison 1962/1963

Aufgaben und Lösungen

2. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 11
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 021131:

Beweisen Sie, daß für alle positiven reellen Zahlen a, b, c

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}>\frac{3}{a+b+c}$$

ist!

Aufgabe 021132:

Gegeben sei ein Dreieck ABC. Zur Seite BC wird eine Parallele gezogen, die die Seiten AB bzw. AC in D bzw. E schneidet.

In welchem Verhältnis teilt D die Seite AB, wenn sich die Umfänge der Dreiecke ADE und ABC zueinander verhalten wie der Inhalt des Dreiecks ADE zum Inhalt des Trapezes $DBCE$?

Aufgabe 021133:

Auf wieviel verschiedene Weisen läßt sich die Zahl 99 als Summe dreier voneinander verschiedener Primzahlen darstellen? (Zwei Fälle gelten als gleich, wenn die gleichen Summanden lediglich in verschiedener Reihenfolge auftreten.)

Aufgabe 021134:

Es sind sämtliche Lösungen der Gleichung $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$ zu bestimmen.

Aufgabe 021135:

Gegeben sei in der Ebene ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und die Schar aller Geraden, die einander sämtlich in einem außerhalb des Kreises liegenden Punkt S schneiden.

Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Sehnen, die der Kreis aus den Geraden herausschneidet?

Aufgabe 021136:

In einer Ebene liegen ein Viereck und ein Fünfeck so, daß keiner ihrer Eckpunkte auf irgendeiner Seite der anderen Figur liegt.

Welches ist die größtmögliche Anzahl der Schnittpunkte der Seiten beider Vielecke? (Die Vielecke brauchen nicht konvex zu sein.)

2. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 11
Lösungen

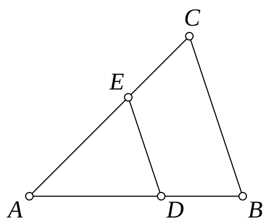
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 021131:
Angewandt wird die Ungleichung zum Arithmetischen und Harmonischen Mittel: Arithmetisches Mittel $\geq$ Harmonisches Mittel. Genutzt werden dabei die $x_1 = a + b$, $x_2 = b + c$, $x_3 = a + c$:

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(a+c)}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}}$$
$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{(a+b)+(b+c)+(c+a)} = \frac{9}{2\,(a+b+c)} > \frac{3}{a+b+c}. \quad \square$$

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 021132:



Sei $k \equiv \frac{AD}{AB}$. Dann gilt ebenso $k = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$, da es sich bei $ABCDE$ wegen $DE \parallel BC$ um eine Strahlensatzfigur handelt. Mit den üblichen Abkürzungen $BC \equiv a$, $CA \equiv b$ und $AB \equiv c$ soll nun laut Voraussetzung

$$\frac{DE+EA+AD}{a+b+c} = \frac{ka+kb+kc}{a+b+c} = k = \frac{[ADE]}{[DBCE]}$$

sein, wobei $[XYZ]$ den Flächeninhalt von XYZ bezeichnet.

Da jedoch $[DBCE] = [ABC] - [ADE]$ gilt und Dreieck ADE aus Dreieck ABC durch eine zentrische Stauchung um den Faktor k hervorgeht, ist $[ADE] = k^2\,[ABC]$. Daraus folgt die Gleichung

$$k = \frac{[ADE]}{[ABC]-[ADE]} = \frac{k^2}{1-k^2} \qquad \Longrightarrow \qquad k^2 + k - 1 = 0.$$

Als Lösung dieser quadratischen Gleichung kommt wegen $0 < k < 1$ nur $k = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \approx 0{,}618$, die Verhältniszahl des *goldenen Schnitts*, in Frage. Punkt D teilt demzufolge die Seite AB im Verhältnis

$$\frac{k}{1-k} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)}{1-\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-1)(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}).$$

Aufgeschrieben von Eckard Specht – Quelle: (11)

Lösung 021133:
Folgende geordnete Paare von Primzahlen a, b erfüllen die Gleichung $a + b = 99 - c$ für ein gegebenes $c > b > a, c > 33$:

c	$99-c$	(a,b) mit $a+b=99-c$	(a,b) mit $c>b>a$	Anzahl
97	2	$\emptyset$	$\emptyset$	0
89	10	(3,7),(5,5)	(3,7)	1
83	16	(3,13),(5,11)	(3,13),(5,11)	2
79	20	(3,17),(7,13)	(3,17),(7,13)	2
73	26	(3,23),(7,19),(13,13)	(3,23),(7,19)	2
71	28	(5,23),(11,17)	(5,23),(11,17)	2
67	32	(3,29),(13,19)	(3,29),(13,19)	2
61	38	(7,31),(19,19)	(7,31)	1
59	40	(3,37),(11,29),(17,23)	(3,37),(11,29),(17,23)	3
53	46	(3,43),(5,41),(17,29),(23,23)	(3,43),(5,41),(17,29)	3
47	52	(5,47),(11,41),(23,29)	(11,41),(23,29)	2
43	56	(3,53),(13,43),(19,37)	(19,37)	1
41	58	(5,53),(11,47),(17,41),(29,29)	$\emptyset$	0
37	62	(3,59),(19,43)	$\emptyset$	0

Für $c \leq 33$ ist $a+b=99-c \geq 66$, d.h. $b>33 \geq c$ wegen $a<b$, also würde dann nicht $c>b$ gelten und eventuelle Tripel (a,b,c) könnten umgeordent werden, so dass $c>b>a$ gilt.

Also lässt sich die 99 auf $1+2+2+2+2+2+1+3+3+2+1=21$ verschiedene Weisen als Summe von drei verschiedenen Primzahlen darstellen.

Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Weber

Lösung 021134:
Zuerst beobachtet man folgende Eigenschaft reeller Zahlen:

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \text{ mit } t<1, t \neq 0 : t^3 < t^2.$$

Damit kann man zeigen, dass $1-\cos^3 x > 1-\cos^2 x$ gilt, außer wenn $\cos x = 0$ oder $\cos x = 1$, dann gilt Gleichheit

Ebenso gilt $\sin^2 x > \sin^3 x$ überall dort, wo $\sin x$ von 0 und 1 verschieden ist. Unter Verwendung des trigonometrischen Pythagoras in der Form $1-\cos^2 x = \sin^2 x$ folgt $1-\cos^3 x > \sin^3 x$, was in der Form $\sin^3 x + \cos^3 x < 1$ ein direkter Widerspruch zu der Gleichung ist, deren Lösungen wir suchen. Also kann sie nur dort Lösungen besitzen, wo die Ungleichung nicht gilt.

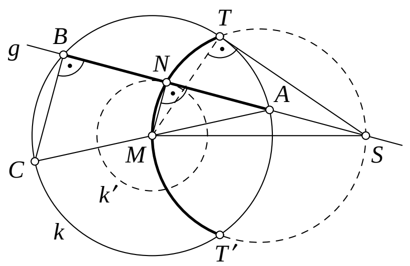
Dies ist gerade dort der Fall, wo sowohl $\sin x$ als auch $\cos x$ einen der Werte 0 oder 1 annehmen, also bei $x_0 = 0$ und $x_1 = \pi/2$. Tatsächlich erfüllen diese beiden Werte die Gleichung, womit die vollständige Lösung (unter Berücksichtigung der Periodizität) aus allen Werten

$$x_{2k} = 2k\pi \text{ und } x_{2k+1} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{N})$$

besteht.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 021135:



Sei AB eine der Sehnen, die die beliebige Gerade g aus dem gegebenen Kreis k herausschneidet und N deren Mittelpunkt. ST und ST' seien die beiden Tangentenabschnitte von S an k.

Ferner sei k' ein Kreis mit dem Mittelpunkt M, für den AN gerade ein Tangentenabschnitt ist.

Dann gilt aufgrund $ST \perp MT$ und $AN \perp MN$:

$$\begin{aligned} SM^2 &= MT^2 + ST^2 \quad \text{(Satz des Pythagoras in } \triangle STM) \\ &= (MT^2 - MN^2) + ST^2 + MN^2 \quad \text{(„nahrhafte Null“ } MN^2 - MN^2) \\ &= (AM^2 - MN^2) + ST^2 + MN^2 \quad \text{(gleiche Radien } MT = AM) \\ &= AN^2 + ST^2 + MN^2 \quad \text{(Satz des Pythagoras in } \triangle ANM) \end{aligned} \tag{1}$$

Nach dem Sekanten-Tangentensatz gilt weiterhin:

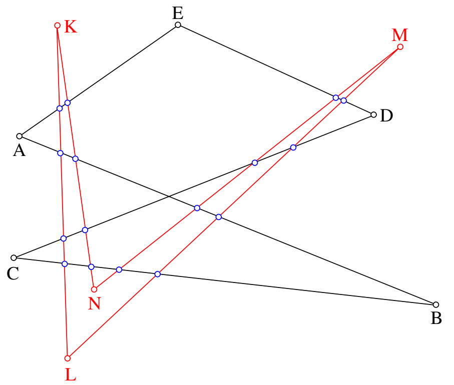
$$ST^2 = SA \cdot SB = \left(\frac{SB + SA}{2}\right)^2 - \left(\frac{SB - SA}{2}\right)^2 = SN^2 - AN^2, \tag{2}$$

wobei $SB + SA = 2SN$ und $SB - SA = 2AN$ wegen der Mittelpunktseigenschaft von N gilt.

(2) in (1) eingesetzt ergibt $SM^2 = SN^2 + MN^2$, woraus mit Hilfe der Umkehrung des Satzes des Pythagoras folgt, dass N auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser SM liegt.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 021136:



Ein ebenes allgemeines Fünfeck ist laut Definition eine geometrische Figur von fünf paarweise voneinander verschiedenen Punkten A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 der gleichen Ebene, von denen keine drei aufeinanderfolgende auf derselben Geraden liegen, die zusammen mit den Strecken $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, $\overline{A_4A_5}$, $\overline{A_5A_1}$ das Fünfeck bilden.

Zunächst bestimmen wir unter Berücksichtigung der Bedingungen aus der Aufgabenstellung (Fünfeck ist nicht unbedingt konvex, Eckpunkte des Fünfecks liegen nicht auf irgendeiner Seite des Vierecks) die maximale Anzahl der Schnittpunkte einer Geraden g mit den Seiten des Fünfeck.

Die Gerade g teile die Ebene ε in zwei Halbebenen ε_1 und ε_2. O.B.d.A. wird angenommen:

$$A_1 \in \varepsilon_1, A_1 \notin g$$

Aus der Definition und den Bedingungen der Aufgabenstellung folgt dann:

$\overline{A_1A_2}$ hat nur dann einen gemeinsamen Schnittpunkt mit g, wenn gilt: $A_2 \in \varepsilon_2, A_2 \notin g$
$\overline{A_2A_3}$ hat nur dann einen gemeinsamen Schnittpunkt mit g, wenn gilt: $A_3 \in \varepsilon_1, A_3 \notin g$
$\overline{A_3A_4}$ hat nur dann einen gemeinsamen Schnittpunkt mit g, wenn gilt: $A_4 \in \varepsilon_2, A_4 \notin g$
$\overline{A_4A_5}$ hat nur dann einen gemeinsamen Schnittpunkt mit g, wenn gilt: $A_5 \in \varepsilon_1, A_5 \notin g$

Die Strecke A_5A_1 kann mit der Geraden g keinen Schnittpunkt haben, da A_1 und A_5 in der gleichen Halbebene ε_1 liegen.

Damit ist bewiesen, dass eine Gerade und somit auch eine Seite eines Vierecks maximal vier Schnittpunkte mit den Seiten eines Fünfeckes haben kann. Hieraus folgt nun wiederum, das die größtmögliche Anzahl der Schnittpunkte der Seiten beider Vielecke $4 \cdot 4 = 16$ sein kann. Es genügt nun an einem Beispiel zu zeigen, dass 16 Schnittpunkte unter den Bedingungen der Aufgabenstellung existieren wie im Bild angegeben.

Es seien $ABCDE$ ein konkaves Fünfeck und $KLMN$ ein konkaves Viereck.

Bemerkung: Die Seiten eines ebenen n-Eck haben mit einer Geraden g maximal $n - 1$ gemeinsame Schnittpunkte bei ungeradem n und n gemeinsame Schnittpunkte bei geradem n.

Aufgeschrieben und gelöst von Manfred Worel

Quellenverzeichnis

(11) Buch: Mathematische Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1979, Aulis-Verlag