2. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1962/1963

Aufgaben und Lösungen

2. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 021221:

Der Begründer des Verfahrens der Linearoptimierung, Prof. Dr. L. W. Kantorowitsch führt folgendes Beispiel an:

In einem Betrieb stehen für Fräsarbeiten zur Verfügung:

a) 3 Fräsmaschinen,

b) 3 Fräsmaschinen mit Revolverkopf-Spannvorrichtung,

c) 1 Automat.

Es sollen in gleicher Anzahl zwei Sorten Werkstücke angefertigt werden. Die Produktion je Arbeitstag beträgt für die oben angegebenen Maschinen je Maschine:

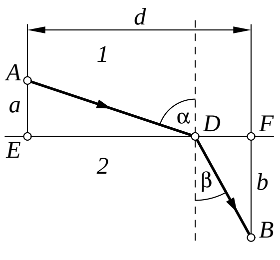
a) 10 Stück Sorte 1 oder 20 Stück Sorte 2,

b) 20 Stück Sorte 1 oder 30 Stück Sorte 2,

c) 30 Stück Sorte 1 oder 80 Stück Sorte 2.

Wieviel Werkstücke können mit diesen Maschinen unter den aufgeführten Bedingungen maximal gefertigt werden?

Aufgabe 021222:



Ein Lichtstrahl, der in einem Medium *1* die Geschwindigkeit c_1 hat, wird an der Grenzschicht gebrochen und hat im Medium *2* die Geschwindigkeit c_2.

Beweisen Sie, daß die für den Weg ADB (siehe Abbildung) benötigte Zeit ein Minimum wird, wenn

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}$$

ist!

Aufgabe 021223:

a) Beweisen Sie, daß für jedes ebene Dreieck gilt:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geq \frac{3}{4}.$$

b) In welchem Falle tritt Gleichheit ein?

Aufgabe 021224:

Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$ und auf ihr ein beliebiger Punkt C. Man wähle einen Punkt E außerhalb $\overline{AB}$ so, daß $\overline{CE} = \overline{CB}$ ist!

Auf der Strecke $\overline{CE}$ bzw. auf ihrer Verlängerung über E hinaus ist ein Punkt D so zu konstruieren, daß $\overline{CA} = \overline{CD}$ ist!

a) Welches ist der geometrische Ort für alle Schnittpunkte M der Stecken AD und BE bzw. ihrer Verlängerungen?

b) Die Behauptung ist für jede mögliche Lage der Punktes C zu beweisen.

Anmerkung: Zur Eigenschaft eines geometrischen Ortes gehört auch der Nachweis, daß *jeder* seiner Punkte die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Aufgabe 021225:

Beweisen Sie, daß für alle positiven reellen Zahlen a und b stets

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

ist!

Anmerkung: Achten Sie auf die richtige Reihenfolge der Beweisschritte!

2. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 021221:

Bezeichne a die Anzahl der Fräsmaschinen zur Produktion von Stücken der Sorte 1, b die Anzahl der Fräsmaschinen mit Revolverkopf-Spannvorrichtung zur Produktion von Stücken der Sorte 1 und c die Anzahl der Automaten zur Produktion von Stücken der Sorte 1.

Dann werden pro Tag $u = 10a + 20b + 30c$ Werkstücke der Sorte 1 und $v = 20(3 - a) + 30(3 - b) + 80(1 - c)$ Werkstücke der Sorte 2 gefertigt.

Offensichtlich ist $u \leq 120$, wobei $v = 0$ für $u = 120$ folgt.

Für $u = 110$, wäre $(a, b, c) = (2, 3, 1)$, d. h. $v = 20$.

Für $u = 100$, wäre $(a, b, c) \in \{(1, 3, 1), (3, 2, 1)\}$, d. h. $v \in \{40, 30\}$.

Für $u = 90$, wäre $(a, b, c) \in \{(0, 3, 1), (2, 2, 1), (3, 3, 0)\}$, d. h. $v \in \{60, 50, 80\}$.

Also werden maximal 80 Paare von Werkstücken der beiden Sorten gefertigt.

Aufgeschrieben von Steffen Weber – Quelle: (11)

Lösung 021222:

Zuerst muss die Zeit als Funktion der Veränderlichen ausgedrückt werden, deren Minimum dann gesucht werden muss. Diese Funktion ist die Summe aus der Zeit für die Durchquerung von Medium *1* und der für Medium *2*:

$$t(\alpha, \beta) = \frac{1}{c_1} \frac{a}{\cos\alpha} + \frac{1}{c_2} \frac{b}{\cos\beta}.$$

Dabei gilt die Nebenbedingung $a \tan\alpha + b \tan\beta = d$. Diese wird wie folgt verwendet:

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{b^2}(d - a\tan\alpha)^2}}.$$

Einsetzen liefert:

$$\tilde{t}(\alpha) = \frac{a}{c_1} \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{b}{c_2} \sqrt{1 + \frac{1}{b^2}(d - a\tan\alpha)^2}.$$

Wir bilden die erste Ableitung:

$$\tilde{t}'(\alpha) = \frac{a}{c_1} \frac{-1}{\cos^2\alpha}(-\sin\alpha) + \frac{b}{c_2} \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{1}{b^2}(d - a\tan\alpha)^2}} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot 2(d - a\tan\alpha) \cdot (-a) \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

An Extremstellen wird diese Null:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{\cos^2\alpha}\left[\frac{a}{c_1}\sin\alpha - \frac{a}{c_2}\frac{d-a\tan\alpha}{\sqrt{b^2+(d-a\tan\alpha)^2}}\right],\\
0 &= c_2\sin\alpha - c_1\frac{d-a\tan\alpha}{\sqrt{b^2+(d-a\tan\alpha)^2}}\\
&= c_2\sin\alpha - c_1\frac{b\tan\beta}{b\sqrt{1+\tan^2\beta}}\\
&= c_2\sin\alpha - c_1\sin\beta.
\end{aligned}$$

Das ist aber äquivalent zu

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Nun muss gezeigt werden, dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt. An den Stellen mit $\tilde{t}'(\alpha) = 0$ gilt für die zweite Ableitung:

$$\begin{aligned}
\tilde{t}''(\alpha) &= \frac{a}{\cos^2\alpha}\left[\frac{1}{c_1}\cos\alpha - \frac{1}{c_2}\frac{1}{\sqrt{b^2+(d-a\tan\alpha)^2}^3}\frac{-a}{\cos^2\alpha}\right]\\
&= \frac{a}{\cos^2\alpha}\left[\frac{1}{c_1}\cos\alpha + \frac{1}{c_2}\frac{a}{\cos^2\alpha\sqrt{b^2+(d-a\tan\alpha)^2}^3}\right]\\
&> 0. \square
\end{aligned}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 021223:

a) Wir starten mit der bekannten Eigenschaft, daß jede Quadratzahl größer oder gleich Null ist und formen äquivalent um:

$$\begin{aligned}
(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\cos\beta-\cos\gamma)^2+(\cos\alpha-\cos\gamma)^2 &\geq 0\\
\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\cos^2\beta-2\cos\beta\cos\gamma+\cos^2\gamma&\\
+\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\gamma+\cos^2\gamma &\geq 0\\
-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta-2\cos\beta\cos\gamma-2\cos\alpha\cos\gamma&\\
+3\cos^2\alpha+3\cos^2\beta+3\cos^2\gamma &\geq 0\\
-(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2+3\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\right) &\geq 0
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma \geq \frac{1}{3}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2 \tag{1}$$

Wir wenden nun die Jensensche Ungleichung für $n = 3$ an, damit sich der Term auf der linken Seite der Ungleichung (1) ergibt:

$$\frac{1}{3}\cos\alpha+\frac{1}{3}\cos\beta+\frac{1}{3}\cos\gamma \geq \cos\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{3}+\frac{\gamma}{3}\right) = \cos(180°) = \tfrac{1}{2} \qquad \text{also}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \geq \frac{3}{2} \tag{2}$$

Setzt man nun (2) in (1) ein, so ergibt sich die Behauptung:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma \geq \frac{1}{3}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2 \geq \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \qquad \square$$

b) Gleichheit gilt, wenn die Einführung von Ungleichungen zur Gleichheit gebracht wird, also:

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\cos\beta - \cos\gamma)^2 + (\cos\alpha - \cos\gamma)^2 = 0$$

Dies ist gleichbedeutend mit

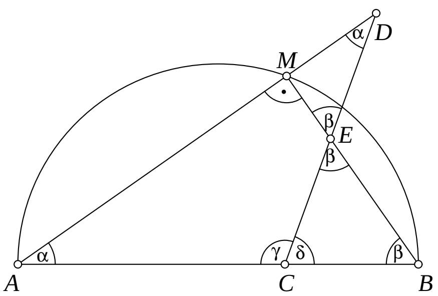
$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 = 0 \text{ und } (\cos\beta - \cos\gamma)^2 = 0 \text{ und } (\cos\alpha - \cos\gamma)^2 = 0$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $\alpha = \beta = \gamma = 60°$. Die Jensensche Ungleichung gilt unter denselben Bedingungen, so daß die Probe die Gleichheit nachweist:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 3 \cdot \cos^2 60° = 3 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{3}{4}.$$

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 021224:



a) Der geometrische Ort aller Punkte M, die die gegebenen Bedingungen erfüllen, ist der Halbkreis mit Durchmesser AB, der auf der gleichen Seite von AB liegt wie der Punkt E.

b) Nach dem Satz des THALES ist es für die Wahrheit der obigen Behauptung notwendig, dass der Winkel $\sphericalangle BMA$ ein rechter Winkel ist. Gleichbedeutend ist es zu zeigen, dass $\sphericalangle DME = 90°$ gilt.

Gemäß dem Innenwinkelsatz gilt aber $\sphericalangle DME + \sphericalangle MED + \sphericalangle EDM = 180°$.

Gemäß dem Innenwinkelsatz gilt aber $\sphericalangle DME + \sphericalangle MED + \sphericalangle EDM = 180°$.

Per Konstruktion ist das Dreieck ACD gleichschenklig, daher $\sphericalangle EDM = \alpha$. Gleiches trifft auf das Dreieck BEC zu, so dass $\beta = \sphericalangle BEC = \sphericalangle MED$ (Gegenwinkel).

Der Außenwinkelsatz führt auf $2\alpha = \delta$ und $2\beta = \gamma$, also $2(\alpha + \beta) = \gamma + \delta = 180°$ (gestreckter Winkel).

Wegen $\alpha + \beta = 90° = \sphericalangle DME$ folgt die Behauptung.

Noch bewiesen werden muss, dass M nur auf einem Halbkreis liegen kann: Wegen $\alpha < 90°$ und $\beta < 90°$ können sich die Geraden BE und AD aber nur auf der einen Seite von AB schneiden. □

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 021225:

Beweis: Aus der bekannten Tatsache, dass das Quadrat einer beliebigen reellen Zahl (hier die Zahl $a - b$) stets nichtnegativ ist, folgt der Reihe nach

$$\begin{aligned} (a-b)^2 &\geq 0 \\ a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0 \\ a^2 + b^2 &\geq 2ab \\ \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} &\geq 2. \end{aligned}$$

Dabei bleibt bei der Division durch $ab > 0$ das Relationszeichen erhalten. □

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Quellenverzeichnis

(11) Buch: Mathematische Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1979, Aulis-Verlag