3. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Saison 1963/1964

Aufgaben und Lösungen

3. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 030721:

Durch welche höchste Potenz von 2 ist das Produkt von vier aufeinanderfolgenden geraden natürlichen Zahlen mindestens teilbar?

Aufgabe 030722:

Konstruiere nur mit Zirkel und Lineal ein gleichseitiges Dreieck mit der Höhe $h = 4$ cm!

Beschreibe und begründe die Konstruktion!

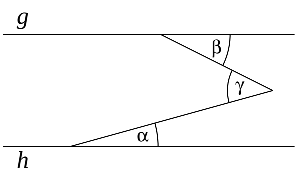
Aufgabe 030723:

Ein Holzwürfel mit einer Kantenlänge von 30 cm soll in Würfel von 10 cm Kantenlänge zersägt werden.

a) Wieviel Schnitte muß man dabei ausführen? (Das Sägen im Paket soll nicht gestattet sein.)

b) Wieviel Würfel erhält man?

Aufgabe 030724:



Gegeben sei die in der Abbildung dargestellte Figur ($g \parallel h$). Die Winkel α und β seien bekannt.

Wie groß ist der Winkel γ? Beweise deine Behauptung!

Aufgabe 030725:

In einem Kasten befinden sich 70 Kugeln, nämlich 20 rote, 20 grüne, 20 gelbe, und der Rest ist schwarz oder weiß. Brigitte soll im Dunkeln aus diesem Kasten so viele Kugeln herausnehmen, daß unter ihnen mit Sicherheit mindestens 10 Kugeln die gleiche Farbe haben.

Wieviel Kugeln muß sie mindestens herausnehmen? Begründe deine Antwort!

3. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 030721:

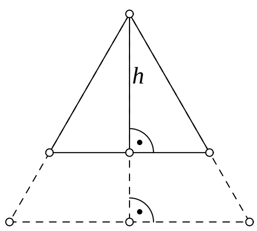
Als Vorüberlegung eignet sich die Tatsache, dass von vier aufeinander folgenden natürlichen Zahlen stets genau eine mindestens durch 4 und genau eine andere durch 2, aber nicht durch 4 teilbar ist.

Demnach ist von den vier aufeinander folgenden *geraden* natürlichen Zahlen stets genau eine mindestens durch 8 und genau eine weitere durch 4, aber nicht durch 8 teilbar. Die beiden anderen geraden Zahlen sind in jedem Fall durch 2, aber nicht durch 4 teilbar. Damit ist das betrachtete Produkt durch $8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$ teilbar.

Da unter den vier aufeinander folgenden geraden Zahlen keine durch 16 teilbar sein muss, ist das Produkt im allgemeinen nicht durch 2^8 teilbar. Die gesuchte höchste Potenz ist demnach 2^7.

Aufgeschrieben und gelöst von Rainer Biallas

Lösung 030722:



Konstruktion: (Bild) Man konstruiere zuerst ein beliebiges gleichseitiges Dreieck (gestrichelt dargestellt). In diesem errichte man eine der Höhen. Auf der (ggf. verlängerten) Höhe trägt man 4 cm vom Eckpunkt des Dreiecks aus ab; dies ist eine der Höhen h des gesuchten Dreiecks. Im erhaltenen Endpunkt von h errichtet man die Senkrechte zu h; so erhält man die dritte Seite des gesuchten Dreiecks (durchgezogen dargestellt). Diese Konstruktion funktioniert, weil alle gleichseitigen Dreiecke zueinander ähnlich sind.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

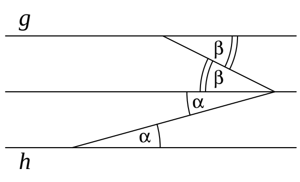
Lösung 030723:

a) Man braucht 26 Schnitte $(2 + 6 + 18)$.

b) Man erhält 27 Würfel $(3 \cdot 3 \cdot 3)$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 030724:



Behauptung: $\gamma = \alpha + \beta$

Beweis: (Bild) Man zeichne eine Parallele zu g und h durch den Scheitelpunkt von γ. Diese teilt γ in zwei Teilwinkel. Nach dem Wechselwinkelsatz ist der obere genauso groß wie β, der untere wie α.

Zusammen gilt also: $\gamma = \alpha + \beta$. $\square$

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 030725:

Sie muß 38 Kugeln nehmen. Im ungünstigsten Falle kann Brigitte zunächst die 10 schwarzen bzw. weißen Kugeln und von jeder Farbe 9 Kugeln, insgesamt also 37 Kugeln, herausnehmen. Nimmt sie jetzt noch eine weitere Kugel heraus, dann hat sie stets mindestens 10 Kugeln gleicher Farbe unter diesen 38 Kugeln.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.