3. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Saison 1963/1964

Aufgaben und Lösungen

3. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 030921:

Von einem Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten AB und CD sind gegeben:

$$\overline{AB} = 6\text{ cm},\quad \overline{BC} = 4\text{ cm},\quad \overline{CD} = 4{,}5\text{ cm},\quad \overline{DA} = 3\text{ cm}.$$

Konstruieren Sie das Trapez und begründen Sie die Konstruktion!

Aufgabe 030922:

Bei einem Preisschießen hat ein Schütze mit 5 Schuß auf einer Zehner-Ringscheibe 40 Ringe erzielt. Bei jedem Schuß hat er mindestens 7 Ringe getroffen.

Wieviele Möglichkeiten gibt es für die bei den einzelnen Schüssen erzielten Ringe?

Anmerkung: Die Reihenfolge ist zu berücksichtigen. So gelten z. B. 7, 7, 7, 9, 10 und 7, 7, 7, 10, 9 als verschiedene Möglichkeiten.

Aufgabe 030923:

Einem spitzwinkligen Dreieck ABC soll ein gleichseitiges Dreieck so einbeschrieben werden, daß eine seiner Seiten parallel zur Seite BC verläuft und die Eckpunkte des einbeschriebenen Dreiecks auf den Seiten des Dreiecks ABC liegen.

Begründen Sie die Konstruktion!

Aufgabe 030924:

Geben Sie alle Paare reeller Zahlen an, deren Summe, Produkt und Quotient untereinander gleich sind!

Aufgabe 030925:

a) Wie müssen 1 023 Kugeln auf 10 Säckchen verteilt werden, damit man jede Anzahl von 1 bis 1 023 Kugeln zusammenstellen kann, ohne ein Säckchen zu öffnen.

b) Wieviel Säckchen werden mindestens benötigt, damit man jede Anzahl von 1 bis 3 000 Kugeln zusammenstellen kann?

3. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 030921:

I. Analyse

Angenommen, $ABCD$ sei ein solches Trapez. Dann gibt es auf AB wegen $|AB| > |CD|$ genau einen Punkt A' mit $|AA'| = |CD|$.

$AA'CD$ ist ein Parallelogramm, insbesondere ist also $|A'C| = |AD|$. Daher genügt das Viereck $ABCD$ nur dann allen Bedingungen der Aufgabe, wenn es folgendermaßen konstruierbar ist.

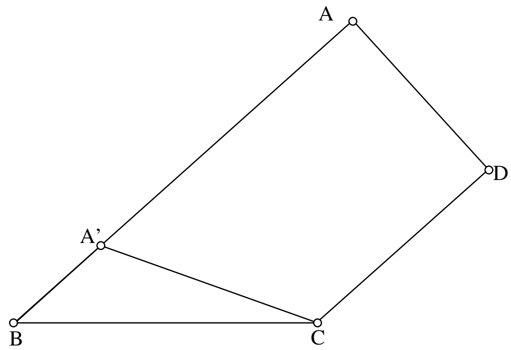
II. Konstruktion

Zunächst wird ein Dreieck $A'BC$ aus seinen drei Seiten konstruiert

$$|A'B| = |AB| - |CD| = 1,5\,\text{cm}$$
$$|BC| = 4\,\text{cm}$$
$$|A'C| = |AD| = 3\,\text{cm}$$

Sodann wird auf dem von B ausgehenden Strahl durch A' von B aus eine Strecke der Länge $|BA| = 6\,\text{cm}$ abgetragen, wodurch man zu A gelangt.

Von A aus wird auf dem zu BC parallelen von A ausgehenden und auf derselben Seite von g_{AB} wie C gelegenen Strahl eine Strecke der Länge $|AD| = 3\,\text{cm}$ abgetragen, wodurch man den Punkt D erhält.



Bemerkung: Es kann deswegen behauptet werden, daß AD nach der angegebenen Seite abgetragen werden muß, weil andernfalls CD die Gerade g_{AB} schneiden und daher nicht parallel AB sein würde.

III. Satz

Wenn die Punkte A, B, C, D gemäß II. konstruiert sind, ist $ABCD$ ein Trapez, das den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Beweis: Da C und D auf derselben Seite von g_{AB} liegen, schneiden sich AB und CD nicht, und da B und A auf verschiedenen Seiten von $g_{A'C}$ liegen und $AD||A'C$ ist, schneiden sich AD und BC nicht.

(Hätten AD und BC einen Schnittpunkt S, so lägen B und S auf verschiedenen Seiten von $g_{A'C}$. Also müßte BS die Gerade $g_{A'C}$ schneiden, was nicht der Fall sein kann, weil g_{BS} und $g_{A'C}$den nicht auf BS gelegenen Schnittpunkt C haben.)

Somit ist $ABCD$ ein (nicht überschlagenes) Viereck.

Da $A'C$ sicher nicht AD schneidet, ist auch $AA'CD$ ein Viereck, und zwar wegen $A'C||AD$ und $|A'C| = |AD|$ ein Parallelogramm. Also gilt $|AA'| = |CD|$, $AA'||CD$ und folglich auch $AB||CD$.

Da A' auf AB liegt, ist $|AA'| = |AB| - |A'B| = 6\text{ cm} - 1,5\text{ cm} = 4,5\text{ cm}$ und daher $|CD| = 4,5\text{ cm}$.

Weil nach Konstruktion $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 4$ cm und $|AD| = 3$ cm ist, sind somit alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

IV. Determination

1. Wegen $|A'C| - |A'B| = 1,5$ cm kleiner als $|BC| = 4$ cm kleiner als $4,5\text{ cm} = |A'C| + |A'B|$ ist $\Delta A'BC$ konstruierbar. Alle folgenden Konstruktionen sind ebenfalls ausführbar.

2. Jeder der Konstruktionsschritte kann auf höchstens eine Weise vorgenommen werden. Es gibt also (bis auf Kongruenztransformationen) genau ein Trapez $ABCD$ der geforderten Art.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 030922:

Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge gibt es folgende Möglichkeiten:

1. 7, 7, 7, 9, 10
2. 7, 7, 8, 8, 10
3. 7, 7, 8, 9, 9
4. 7, 8, 8, 8, 9
5. 8, 8, 8, 8, 8

und nur diese.

Die Beobachtung der Reihenfolgeführt zur Berechnung der Anzahl von sogenannten Anordnungen (Permutationen) mit Wiederholung.

1. Wären alle 5 Zahlen verschieden, so gäbe es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ verschiedene Möglichkeiten der Anordnung. Da jedoch die 7 dreimal auftritt, fallen $3 \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten in eine einzige zusammen, so daß $\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1} = 20$ Möglichkeiten übrig bleiben.

2. und 3. analoge Überlegungen führen zu $\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot2\cdot1} = 30$ Möglichkeiten.

4. wie 1.

5. 1 Möglichkeit.

Insgesamt gibt es $20 + 30 + 30 + 20 + 1 = 101$ Möglichkeiten.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 030923:

I. Analyse

Angenommen, D, E, F genügen allen Bedingungen der Aufgabe. Bezeichnet E' den auf der anderen Seite von g_{BC} wie A gelegenen Eckpunkt des gleichseitigen Dreiecks mit der Seite BC, dann ist E der Schnittpunkt von AE' mit g_{BC}.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $FD||CB$ und $|\sphericalangle DFE| = 60°$, und nach Definition $|\sphericalangle BCE'| = 60°$. Da E und E' auf derselben Seite von g_{FD} liegen wie g_{CB}, folgt $CD'||FE$ und entsprechend $FE||BE'$.

Die Gerade g_{AE} schneidet $g_{CE'}$ in einem Punkt, der P genannt sei, und die Gerade $g_{BE'}$ in einem Punkt, der Q genannt sei. Dann gelten nach dem 1. Strahlensatz die Beziehungen

$$|AD| : |AB| = |AF| : |AC|,$$
$$|AD| : |AB| = |AE| : |AQ'|,$$
$$|AF| : |AC| = |AE| : |AF|.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$|AE| : |AP| = |AE| : |AQ|,$$

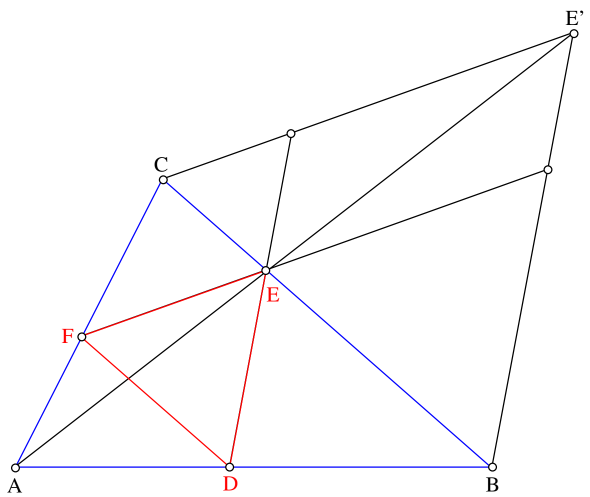
also $|AP| = |AQ|$ und damit $P = Q = E'$. Daher ist ΔCPB gleichseitig; denn jeder der Winkel $\sphericalangle BCP$, $\sphericalangle CBP$ hat entweder die Größe 60° oder 120°, und 120° kommt nicht in Frage, weil die Winkelgrößensumme im Dreieck 180° beträgt.

Daher können E, F, D nur dann allen Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn sie auf folgende Weise konstruierbar sind.

II. Konstruktion

Man konstruiere über CB das gleichseitige Dreieck CBE', dessen Ecke E' nicht auf derselben Seite von g_{BC} wie A liegt. Dann schneidet die Strecke AE' die Gerade g_{BC} in einem Punkt E.

F sei der Schnittpunkt von g_{AC} mit der Parallelen zu CE' durch E; D der Schnittpunkt von g_{AB} mit der Parallelen zu BE' durch E.



III. Satz

Wenn E, F, D gemäß II. konstruiert sind, genügt ΔEFD allen Bedingungen der Aufgabe.

Beweis:

a) Man überzeugt sich zunächst davon, daß E auf BC liegt: Da nach Voraussetzung ΔABC spitz ist und A und E' auf verschiedenen Seiten von g_{BC} liegen, gilt

$$|\sphericalangle ABE'| = |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CBE'| \leq 90° + 60° < 180°$$

und entsprechend $|\sphericalangle ACE'| < 180°$.

Daher kann E nicht mit B oder C zusammenfallen. Läge E nicht auf BC, so läge BC auf ein und derselben Seite von $g_{AE'}$. Dann wäre einer der beiden Winkel $\sphericalangle EBE'$ oder $\sphericalangle ECE'$ Außenwinkel zum Dreieck BCE'.

O.B.d.A. kann angenommen werden, daß dies der Winkel $\sphericalangle EBE'$ ist. Da A und E' auf verschiedenen Seiten von g_{EC} liegen, läge B im Innern des Dreiecks $AE'C$ und es wäre $360° = |\sphericalangle ABE'| + |\sphericalangle E'BC| + |\sphericalangle CBA|$, also

$$|\sphericalangle CBA| = 360° - |\sphericalangle ABE'| - |\sphericalangle E'BC| > 360° - 180° - 60° = 120°,$$

d.h. ΔABC wäre nicht spitzwinklig.

b) Läge F nicht auf AC, so lägen A und C auf derselben Seite von g_{EF}, und zwar wegen $g_{EF}||g_{CE'}$ auf derselben Seite wie E', so daß AE' keinen Punkt mit g_{EF} gemeinsam hätte. Das ist ein Widerspruch, weil E auf AE' und g_{EF} liegt.

c) Entsprechend zeigt man, daß D auf AB liegt.

d) Wegen $g_{EF}||g_{E'C}$ und $g_{ED}||g_{E'B}$ folgt nun nach dem 1. Strahlensatz $|AD| : |AB| = |AE| : |AE'| = |AF| : |AC|$ und aus $|AD| : |AB| = |AF| : |AC|$ nach Umkehrung des 1. Strahlensatzes $DF||BC$.

e) Da EE' die Gerade g_{AC} nicht schneidet (denn der Schnittpunkt von $g_{EE'}$ mit g_{AC} ist A, und A liegt nicht auf EE', weil E auf AE' liegt), liegen E und E' auf derselben Seite von g_{AC}. Daher gilt $\sphericalangle AFE \cong \sphericalangle ACE'$, wegen $FE||CE'$.

Entsprechend ergibt sich, da DB auf derselben Seite von g_{AC} liegt wie EE', $\sphericalangle AFD \cong \sphericalangle ACB$ und weiter $|\sphericalangle DFE| = |\sphericalangle BCE'| = 60°$.

Analog folgt, daß auch die anderen Innenwinkel von ΔDEF je die Größe 60° haben, so daß ΔDEF gleichseitig ist.

IV. Determination

Da jeder Konstruktionsschritt stets ausführbar ist, und zwar genau auf eine Weise, gibt es stets genau ein Dreieck DEF, das allen Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 030924:

Ist (a, b) ein Paar reeller Zahlen, für das

$$a + b = a \cdot b \qquad (1)$$
$$a \cdot b = \frac{a}{b} \qquad (2)$$

gilt, so folgt aus (2), daß $b \neq 0$ ist, und danach aus (1), daß $a \neq 0$, und aus (2), daß $b^2 = 1$ ist. Also gilt $b_1 = +1$ oder $b_2 = -1$.

Der 1. Fall führt zu $a + 1 = a$ und damit zu einem Widerspruch.

Der 2. Fall ergibt $a - 1 = -a$ und damit $a = \frac{1}{2}$ als einzig mögliche Lösung.

Durch Einsetzen in (1) und (2) zeigt man, daß $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ Lösung und damit das einzige Paar reeller Zahlen ist, das alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 030925:

a) Bei der Verteilung der Kugeln auf die Säckchen kann man sich am Binärsystem orientieren, da man für jeden Sack nur 2 Möglichkeiten bei der Zusammenstellung einer Anzahl hat, man nimmt ihn, oder man nimmt ihn nicht. Die Säckchen müssen damit den Zweierpotenzen entsprechen.

   Das ergibt folgende Kugelverteilung: $1 - 2 - 4 - 8 - 16 - 32 - 64 - 128 - 256 - 512$.

b) Um nach dem selben Verfahren Anzahlen bis 3 000 darstellen zu können, müssen 2 weitere Säckchen hinzugenommen werden, gefüllt mit 1024 und 2048 Kugeln.

Aufgeschrieben und gelöst von Korinna Grabski

Quellenverzeichnis

(11) Buch: Mathematische Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1979, Aulis-Verlag