3. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1963/1964

Aufgaben und Lösungen

3. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

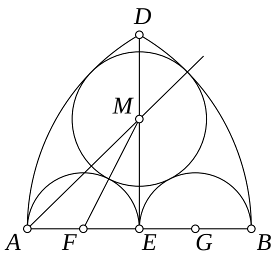
Aufgabe 031221:

Geben Sie ohne Benutzung einer Tafel der Kubikzahlen alle zweistelligen Zahlen an, deren dritte Potenzen mit den Ziffern der ursprünglichen Zahl in derselben Anordnung beginnen!

Aufgabe 031222:

Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$. Ein Schnittpunkt der um A bzw. B mit $\overline{AB}$ geschlagenen Kreisbogen sei D (siehe Abbildung). E sei der Mittelpunkt von $\overline{AB}$. Über $\overline{AE}$ und $\overline{EB}$ als Durchmesser seien die Halbkreise geschlagen.

Berechnen Sie $\overline{ME}$, wobei M der Mittelpunkt des Kreises ist, der beide Halbkreise und die Kreisbogen AD und BD berührt!



Aufgabe 031223:

Bestimmen Sie die Menge aller Paare (x, y) von reellen Zahlen x, y, die die folgenden Gleichungen befriedigen:

$$\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2},\qquad \cos x\cdot\cos y=\frac{1}{4}.$$

Aufgabe 031224:

Es sei $\overline{AD}$ die Höhe eines Dreiecks ABC. Ein Kreis, der die Seite BC in D berührt, möge die Seite $\overline{AB}$ in M und N und die Seite $\overline{AC}$ in P und Q schneiden.

Man beweise, daß

$$\frac{AM+AN}{AC}=\frac{AP+AQ}{AB}\quad\text{ist!}$$

Aufgabe 031225:

Zwei Hirten verkaufen eine Anzahl von Tieren, von denen jedes genausoviel Groschen einbringt, wie die Anzahl der Tiere beträgt. Den Erlös verteilen sie folgendermaßen:

Der erste Hirt erhält 10 Groschen, der zweite 10 Groschen, dann wieder der erste 10 Groschen, der zweite 10 Groschen usw. Nachdem der erste zum letzten Mal 10 Groschen erhalten hat, verbleibt ein Rest, der kleiner als 10 Groschen ist. Von diesem Rest kaufen sie ein Messer.

Wieviel kostet das Messer?

3. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 031221:

Wenn es eine Zahl x gibt, die den Bedingungen der Aufgabe genügt, so ist x^3 entweder vierstellig (Fall 1) oder fünfstellig (Fall 2) oder sechsstellig (Fall 3), da x eine zweistellige Zahl ist und $10^3 = 1\,000$ und $99^3 = 970\,299$.

1) Da x^3 mit denselben Ziffern in derselben Anordnung wie x beginnt, lässt sich x^3 in folgender Form schreiben: $x^3 = 100x+y$ mit $0 \leq y \leq 99$, d. h., es gilt: $100x \leq x^3 < 100x+100$, $100x \leq x^3 < 100(x+1)$ und folglich $100 \leq x^2 < 100(1 + 1/x) \leq 100(1 + 1/10) = 110$ wegen $x \geq 10$. Also $100 \leq x^2 < 110$.

   Diese Beziehung ist nur für $x = 10$ erfüllt.

2) Da x^3 mit denselben Ziffern in derselben Anordnung wie x beginnt, lässt sich x^3 in folgender Form schreiben: $x^3 = 1000x + y$ mit $0 \leq y \leq 999$, d. h. es gilt: $1000x \leq x^3 < 1000x + 1000$, $1000x \leq x^3 < 1000(x + 1)$ und folglich $1000 \leq x^2 < 1000(1 + 1/x) \leq 1100$.

   Diese Beziehung ist nur für $x = 32$ erfüllt.

3) Da x^3 mit denselben Ziffern in derselben Anordnung wie x beginnt, lässt sich x^3 in folgender Form schreiben: $x^3 = 10000x + y$ mit $0 \leq y \leq 9999$, d. h. es gilt: $10000x \leq x^3 < 10000x + 10000$, $10000x \leq x^3 < 10000(x + 1)$ und folglich $10000 < x^2$.

   Dies ist nicht möglich, da x zweistellig ist und daher x^2 höchstens vierstellig sein kann.

Folglich sind wegen $10^3 = 1000$ und $32^3 = 32768$ die Zahlen 10 und 32 die einzigen, die der Bedingung der Aufgabe entsprechen.

Aufgeschrieben von Burkhard Thiele – Quelle: (11)

Lösung 031222:

Ist r der Radius des in der Aufgabe genannten Kreises um M, so gilt wegen der vorausgesetzten Berührung von innen $|AM| = a - r$, $|BM| = a - r$. Daher liegt M auf der Mittelsenkrechten m von AB. Da E auf m und auf AB liegt, sind die Dreiecke ΔAEM und ΔFEM bei E rechtwinklig und es folgt aus dem Lehrsatz des Pythagoras

$$|ME|^2 = |AM|^2 - |AE|^2 = (a - r)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \text{sowie} \tag{1}$$

$$|ME|^2 = |FM|^2 - |FE|^2 = \left(\frac{a}{2} + r\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2 . \tag{2}$$

Wegen der vorausgesetzten Berührung von außen gilt nämlich $|FM| = \frac{a}{4} + r$. Aus (1) und (2) ergibt sich

$$(a-r)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{4}+r\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2, \quad \text{also}$$
$$\frac{3}{4}a^2 - 2ar + r^2 = \frac{ar}{2} + r^2 \quad \text{und weiter}$$
$$\frac{3}{4}a^2 = \frac{5}{2}ar \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{3}{10}a.$$

Mit Hilfe von (1) erhält man hieraus

$$|ME|^2 = \left(\frac{7}{10}a\right)^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{24}{100}a^2, \quad \text{also} \quad |ME| = \frac{\sqrt{6}}{5}\,a.$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 031223:
Mit Hilfe des Additionstheorems

$$\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}\cdot(\cos x + \cos y)$$

erhält man das folgende, dem gegebenen Gleichungssystem äquivalente Gleichungssystem:

$$\cos x + \cos y = 1, \qquad \cos x \cos y = \frac{1}{4}. \tag{1}$$

Hieraus folgt:

$$(1-\cos y)\cdot\cos y = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \left(\cos y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0,$$

d.h. $\cos x = \frac{1}{2}$ und $\cos y = \frac{1}{2}$. Dies ist die einzige Lösung des Gleichungssystems (1). Daraus folgt:

$$x = 2\,m\,\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad y = 2\,n\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

wobei m und n ganze Zahlen sind.

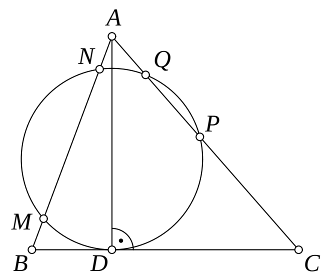
Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 031224:
Beweis: Da die Seite BC tangential an den genannten Kreis liegt, können wir den Sekanten-Tangentensatz ausgehend von den Punkten B und C hinschreiben:

$$BM\cdot BN = BD^2 \quad \text{und} \quad CP\cdot CQ = CD^2.$$

Setzen wir hierin

$$\begin{aligned} BM &= AB - AM,\\ BN &= AB - AN,\\ CP &= AC - AP,\\ CQ &= AC - AQ \quad \text{sowie}\\ BD^2 &= AB^2 - AD^2 \quad \text{und}\\ CD^2 &= AC^2 - AD^2 \end{aligned}$$



ein, multiplizieren aus und berücksichtigen schließlich noch den Sehnensatz $AM\cdot AN = AP\cdot AQ$, erhalten wir die Gleichung $(AM+AN)\,AB = (AP+AQ)\,AC$, die der Behauptung äquivalent ist. □

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 031225:

Der Erlös für ein Tier betrage n Groschen, mithin werden n Tiere verkauft und die Hirten bekommen insgesamt n^2 Groschen für ihre Tiere.

Nach jeder Runde beim Verteilen (erster Hirte bekommt 10 Groschen, zweiter Hirte ebenfalls) verringert sich der verbleibende Betrag um 20 Groschen. Zuletzt bleiben also $n^2 \bmod 20$ Groschen, von denen der erste Hirte noch einmal 10 Groschen bekommt und danach sind noch $n^2 \bmod 20 - 10$ Groschen übrig und es gilt

$$\begin{array}{rcccl} 0 & < & n^2 \bmod 20 - 10 & < & 10 \\ 10 & < & n^2 \bmod 20 & < & 20 \end{array}$$

Jede natürliche Zahl n lässt sich darstellen als $10a + b$ mit $a \in \mathbb{N}_0$ und $b \in \mathbb{Z} \cap [-4, 5]$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} n^2 \bmod 20 &= (10a + b)^2 \bmod 20 \\ &= (100a^2 + 20ab + b^2) \bmod 20 \\ &= b^2 \bmod 20. \end{aligned}$$

Wegen $(-b)^2 = b^2$ testen wir nur

$$\begin{array}{rrcr} b = 0: & 0 \bmod 20 & = & 0 \\ b = 1: & 1 \bmod 20 & = & 1 \\ b = 2: & 4 \bmod 20 & = & 4 \\ b = 3: & 9 \bmod 20 & = & 9 \\ b = 4: & 16 \bmod 20 & = & 16 \\ b = 5: & 25 \bmod 20 & = & 5 \end{array}$$

und erhalten, dass nur $|b| = 4$ die Bedingung $10 < n^2 \bmod 20 < 20$ erfüllt und schließen daraus, dass das Messer 6 Groschen kostet, unabhängig davon, wie viele Tiere genau verkauft wurden.

Aufgeschrieben und gelöst von Henning Thielemann

Quellenverzeichnis

(11) Buch: Mathematische Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1979, Aulis-Verlag